

# Couplages

David MICHEL

École normale supérieure de Rennes

2016-2017

## Algèbre :

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
  - Groupe simple d'ordre 60 (action par conjugaison)
  - Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$  (action par congruence)
  - Sous-groupes distingués et caractères (action par translation)
- 102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - Morphismes continus de  $\mathcal{S}^1$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$
- 103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
  - Groupe simple d'ordre 60
  - Sous-groupes distingués et caractères
  - Théorème de Frobenius-Zolotarev
- 104 Groupes finis. Exemples et applications.
  - Groupe simple d'ordre 60
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - Sous-groupes distingués et caractères
- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
  - Théorème de Frobenius-Zolotarev
  - Groupe simple d'ordre 60
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
  - Théorème de Frobenius-Zolotarev
  - Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$
  - Morphismes de groupes de  $(\mathcal{S}^1, \times)$  dans  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$  continus
- 107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Exemples.
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - Sous-groupes distingués et caractères
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
  - Théorème de Frobenius-Zolotarev
  - Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$
- 110 Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de FOURIER discrète. Applications.
  - Théorème de structure des groupes abéliens finis
  - Formule de Poisson pour les groupes abéliens finis
- 120 Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.
  - Théorème de Sophie Germain
  - Théorème de Frobenius-Zolotarev

- 121 Nombres premiers. Applications.
- Algorithme de Berlekamp
  - Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$
  - Théorème de Sophie Germain
- 122 Anneaux principaux. Applications.
- Étude de l'anneau  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1 + i\sqrt{19}}{2} \right]$
  - Algorithme de Berlekamp
- 123 Corps finis. Applications.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev
  - Algorithme de Berlekamp
  - Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$
- 125 Extensions de corps. Exemples et applications.
- Lemme de Dedekind et application
  - Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$
- 126 Exemples d'équations diophantiennes.
- Théorème de Sophie Germain
  - Équation de Pell-Fermat
- 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- Algorithme de Berlekamp
  - Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$
- 142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
- Sommes de Newton et algorithme de Faddeev
  - Théorème de Kronecker et application aux sous-groupes finis de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$
- 144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- Sommes de Newton et algorithme de Faddeev
  - Théorème de Kronecker et application aux sous-groupes finis de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$
  - Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$
- 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- Invariants de similitude
  - Sous-groupes compacts de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- 151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- Lemme de Dedekind et application
  - Invariants de similitude
- 152 Déterminant. Exemples et applications.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev
  - Ellipsoïde de John-Loewner
- 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- Invariants de similitude
  - Réduction des endomorphismes normaux
  - Décomposition de Dunford

- 154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- Invariants de similitude
  - Décomposition de Dunford
  - Réduction des endomorphismes normaux
- 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- Morphismes de groupes de  $(\mathcal{S}^1, \times)$  dans  $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  continus
  - Réduction des endomorphismes normaux
- 156 Exponentielle de matrices. Applications.
- Image de l'exponentielle
  - Étude de  $O(p, q)$
  - Morphismes de groupes de  $(\mathcal{S}^1, \times)$  dans  $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  continus
- 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent
  - Décomposition de Dunford
- 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- Étude de  $O(p, q)$
  - Méthode du gradient à pas optimal
- 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- Invariants de similitude
  - Théorème des extrema liés
- 160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- Ellipsoïde de John-Loewner
  - Réduction des endomorphismes normaux
- 161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.
- Table de  $\mathfrak{S}_4$
  - Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$
- 162 Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- Méthode du gradient à pas optimal
  - Lemme de Dedekind et application
- 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- Étude de  $O(p, q)$
  - Ellipsoïde de John-Loewner
- 171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- Étude de  $O(p, q)$
  - Ellipsoïde de John-Loewner
- 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
- Méthode du gradient à pas optimal
  - Sous-groupes compacts de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- 183 Utilisation des groupes en géométrie.
- Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$
  - Table de  $\mathfrak{S}_4$
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux
  - Polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$
  - Groupe simple d'ordre 60

## Analyse et Probabilités :

- 201 Espaces de fonctions; exemples et applications.
  - Théorème de Lax-Milgram
  - Théorème de Weierstrass par Bernstein
  - Densité des polynômes orthogonaux
  
- 202 Exemples de parties denses et applications.
  - Théorème de Weierstrass par Bernstein
  - Densité des polynômes orthogonaux
  
- 203 Utilisation de la notion de compacité.
  - Théorème des lacunes de Hadamard
  - Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$
  - Ellipsoïde de John-Loewner
  
- 204 Connexité. Exemple et applications.
  - Image de l'exponentielle
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  
- 205 Espaces complets. Exemples et applications.
  - Théorème de Lax-Milgram
  - Théorème de Grothendieck
  - Méthode de Newton
  
- 207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
  - Théorème des lacunes de Hadamard
  - Théorème d'Abel et théorème taubérien faible
  - Densité des polynômes orthogonaux
  
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
  - Méthode de Newton
  - Théorème de Grothendieck
  
- 209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
  - Théorème de Weierstrass par Bernstein
  - Équation de la chaleur
  - Densité des polynômes orthogonaux
  
- 213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
  - Théorème de Lax-Milgram
  - Densité des polynômes orthogonaux
  
- 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  - Théorème des extrema liés
  
- 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.
  - Théorème de Hadamard-Lévy
  - Méthode du gradient à pas optimal
  - Méthode de Newton
  
- 218 Applications des formules de TAYLOR.
  - Méthode de Newton
  - Méthode de Laplace
  
- 219 Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
  - Méthode du gradient à pas optimal
  - Théorème des extrema liés

- Ellipsoïde de John-Loewner
- 220 Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
  - Théorème de stabilité en première approximation
  - Théorème de Hadamard-Lévy
- 221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
  - Équation de Bessel
  - Théorème de stabilité en première approximation
- 222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
  - Équation de la chaleur dans une barre
  - Théorème de Lax-Milgram
- 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
  - Modèle de Galton-Watson
  - Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible
- 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
  - Méthode de Laplace
  - Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible
- 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
  - Modèle de Galton-Watson
  - Méthode de Newton
- 228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
  - Théorème de Weierstrass par Bernstein
  - Théorèmes de Dini et Glivenko-Cantelli
- 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
  - Théorèmes de Dini et Glivenko-Cantelli
  - Méthode du gradient à pas optimal
- 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
  - Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible
  - Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux
- 233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.
  - Méthode du gradient à pas optimal
  - Méthode de Newton
- 234 Espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .
  - Théorème de Grothendieck
  - Théorème de Lax-Milgram
- 235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
  - Méthode de Laplace
  - Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible
  - Inversion de la fonction caractéristique
- 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
  - Formule des compléments
  - Formule sommatoire de Poisson
- 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
  - Méthode de Laplace

- Inversion de la fonction caractéristique
- 241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- Formule sommatoire de Poisson
  - Théorème des lacunes de Hadamard
  - Théorème d'Abel et théorème taubérien faible
  - Théorèmes de Dini et de Glivenko-Cantelli
  - Théorème de Weierstrass par Bernstein
  - Équation de la chaleur
  - Équation de Bessel
- 243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- Théorème d'Abel et théorème taubérien faible
  - Théorème des lacunes de Hadamard
  - Équation de Bessel
- 245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.
- Densité des polynômes orthogonaux
  - Formule des compléments
- 246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.
- Équation de la chaleur dans une barre
  - Formule sommatoire de Poisson
- 250 Transformation de FOURIER. Applications.
- Inégalité de Heisenberg
  - Densité des polynômes orthogonaux
- 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.
- Méthode du gradient à pas optimal
  - Ellipsoïde de John-Loewner
- 260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
- Modèle de Galton-Watson
  - Théorème de Weierstrass par Bernstein
- 261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
- Inversion de la fonction caractéristique
  - Théorème central limite
- 262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
- Théorèmes de Dini et de Glivenko-Cantelli
  - Théorème central limite
- 263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
- Théorèmes de Dini et de Glivenko-Cantelli
  - Théorème central limite
- 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- Modèle de Galton-Watson
  - Théorème de Weierstrass par Bernstein