

Contrôle continu n° 1

Exercice 1 (3 pts)

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{3n^2+k}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 (7 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = 4x^n + 2x^2 + 3x - \frac{7}{8}. \quad (1)$$

1. Montrer que f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1/2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante et convergente.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.