

Examen

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. Toute réponse devra être précisément justifiée.

Durée de l'épreuve : 1 heure

Exercice 1 : (1 point)

Démontrer par le calcul ou par un argument d'analyse combinatoire que $C_n^p = C_n^{n-p}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$.

Exercice 2 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et ne simplifierez par les fractions.

Dans une population, il y a 5% de daltoniens chez les hommes et 0.25% chez les femmes. 48% de la population sont des hommes.

1. (2 points) On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit daltonienne ?
2. (2 points) La personne est daltonienne. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme ?

Exercice 3 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et donnerez la valeur exacte des résultats.

Soit X , une variable aléatoire qui suit une loi normale, de moyenne ν et de variance σ^2 , et telle que :

$$\mathbb{P}(X < 3) = 0.15866 \text{ et } \mathbb{P}(X > 12) = 0.02275$$

1. (2.5 points) Déterminer ν et σ^2 .
2. (1.5 points) Calculer $\mathbb{P}(1 < X < 10)$.

Exercice 4 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles.

On considère une variable aléatoire continue X dont la densité est $f(x) = \frac{2+x}{8}$ si $-2 \leq x \leq 2$ et $f(x) = 0$ si $x \notin [-2, 2]$.

1. (1 point) Justifier que f est bien une densité.
2. (1.5 points) Calculer l'espérance de X .
3. (1.5 points) Calculer la variance de X .
4. (1.5 points) On pose $Z = X + 2$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 5 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et donnerez la valeur exacte des résultats.

On suppose que le nombre de boules de glace que Julia va manger est modélisé par une variable aléatoire X . On suppose que Julia ne mange jamais plus de 5 boules de glace en une fois. La loi de X est définie par :

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	

1. (0.5 point) Calculer $\mathbb{P}(X = 5)$.
2. (1 point) Quelle est la probabilité que Julia mange au moins 2 boules de glace ?
3. (1.5 points) Calculer l'espérance de X .
4. (1.5 points) Calculer la variance de X .
5. (2 points) Julia a un poids trop faible donc maintenant sa mère va lui doubler chaque portion de glace. Soit Y le nombre de boules de glace que la mère de Julia va lui donner. Quelle est l'espérance et la variance de Y ?

$$\Phi(t) = P(X \leq t) \text{ pour } X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997