

Exercice 1 Montrer que les intégrales $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ et $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1}$ sont divergentes.

Que peut-on dire de l'intégrale $\int_2^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$?

Exercice 2 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Exercice 3 Étudier la convergence en fonction des paramètres

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}} dx, \quad a \text{ réel } > 0, \quad \int_0^{+\infty} e^{-tu} \sin u \, du, \quad \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt.$$

Exercice 4 Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} \text{ (faire le changement } t = \sqrt{1+x}\text{)}, \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} \right) dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 5 Soit $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $u_n \leq \int_1^n \frac{dt}{t^2}$ en comparant $\frac{1}{k^2}$ et $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$.

2. En déduire que la suite (u_n) est bornée puis convergente.

Soit f la fonction continue définie sur \mathbb{R} de la façon suivante :

- pour tout entier $n \geq 2$, $f(n) = n$, $f\left(n - \frac{1}{n^3}\right) = f\left(n + \frac{1}{n^3}\right) = 0$ et f est affine sur $\left[n - \frac{1}{n^3}, n\right]$ et sur $\left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$,
- f est nulle ailleurs.

3. Donner l'allure du graphe de f .

4. Comparer $\int_0^{n+\frac{1}{n^3}} f(t) dt$ et u_n .

5. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge bien que f soit non bornée.