Séminaire de Master 2 - Université de Rennes 1

Adaptative tests of homogeneity for a Poisson process [1]

Séminaire encadré par Ronan LE GUEVEL

Fabrice GRELA

1 Introduction.

1.1 Motivations.

Les processus de Poisson sont utilisés pour modéliser différentes situations : un nombre de panne, les passages d'un bus, les arrivées de clients à un guichet... Plus récemment, ils ont permis de modéliser le nombre d'occurences de motifs dans un brin d'ADN. L'enjeu est alors de détecter des anomalies afin, par exemple, de prévenir une maladie.
Le but de ce séminaire est de construire un test d'homogénéité d'un processus de Poisson N. On suppose que l'on observe ce processus de Poisson sur un intervalle de temps fini, disons sur $[0,1]$. On note s l'intensité du processus par rapport à une mesure μ sur $[0,1]$ et tel que $d\mu(x) = Ldx$ pour $L \in \mathbb{R}$. [1]

On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$. On veut tester l'hypothèse nulle (H_0) : "$s \in \mathcal{S}_0$" contre l'alternative (H_1) : "$s \notin \mathcal{S}_0$". Quel sens donner à l'alternative "$s \notin \mathcal{S}_0$" ? Par exemple, dans l'étude des répétitions de certains motifs dans une séquence d'ADN, on peut être amené à distinguer un processus de Poisson avec une intensité constante d'un processus de Poisson dont l'intensité peut avoir localement quelques piques de faible amplitudes. Ainsi, nous souhaitons construire un test adaptatif, c'est-à-dire un test qui n'utilise aucun a priori sur la régularité de l'intensité s mais qui est le plus performant possible (au sens minimax précisé dans la sous-section suivante).

1.2 Taux de séparation uniforme.

La performance de notre test sera évaluée en terme de taux de séparation uniforme selon une distance d choisie. Soient $\beta \in]0,1[$, une classe de fonctions $\mathcal{S}_1$ et un test de niveau $\alpha \in]0,1[$, ϕ_α à valeurs dans $\{0,1\}$ qui rejette l'hypothèse nulle (H_0) si $\phi_\alpha = 1$. Dans la suite, d sera la distance induite par la norme définie sur $L^2([0,1])$.

Le taux de séparation uniforme $\rho(\phi_\alpha, \mathcal{S}_1, \beta)$ de ϕ_α sous la classe de fonction $\mathcal{S}_1$ est définie comme étant le plus petit réel positif ρ tel que l'erreur de seconde espèce du test est au plus égal à β pour toutes alternatives $s \in \mathcal{S}_1$ a distance ρ de $\mathcal{S}_0$. Cela s'interprète comme la plus petite distance entre une alternative $s \in \mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_0$ pour que les hypothèses (H_0) et (H_1) soient suffisament "séparées", distinguables par le test.

Définition 1.1

Si $\mathbb{P}_s$ désigne la loi d'un processus de Poisson N d'intensité s, le taux de sépraration uniforme sous $\mathcal{S}_1$ est définie par

$$\begin{aligned}\rho(\phi_\alpha, \mathcal{S}_1, \beta) &= \inf\{\rho > 0, \sup_{s \in \mathcal{S}_1, d(s,\mathcal{S}_0) > \rho} \mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta\} \\ &= \inf\{\rho > 0, \sup_{s \in \mathcal{S}_1, d(s,\mathcal{S}_0) > \rho} \mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 1) \geq 1 - \beta\}\end{aligned}$$

Le taux de séparation minimax sous $\mathcal{S}_1$ est définie par

$$\underline{\rho}(\mathcal{S}_1, \alpha, \beta) = \inf_{\phi_\alpha} \rho(\phi_\alpha, \mathcal{S}_1, \beta).$$

Le taux de séparation minimax correspond à la plus petite distance $\rho > 0$ pour laquelle il existe un test ϕ_α de niveau α, dont l'erreur de seconde espèce n'est pas plus grande que β.

Pour notre étude, nous allons considérer comme espace de fonctions alternatives $\mathcal{S}_1$, les Besov bodies classiques et faibles dont nous préciserons la définition en section 2.

1. L'introduction de ce réel L permet de définir une asymptotique pour l'observation du processus de Poisson, le nombre d'observations étant aléatoire sur l'intervalle $[0,1]$.

1.3 Organisation du rapport.

Dans un premier temps, nous établirons des bornes inférieures pour les vitesses de séparation uniformes relativement à la norme L^2 sur des Besov bodies classiques ou faibles (espace $\mathcal{S}_1$). Plus précisément, nous allons déterminer $\tilde{\rho}$ tel que

$$\underline{\rho}(\mathcal{S}_1, \alpha, \beta) \geq \tilde{\rho}.$$

Dans un second temps, nous allons construire un test non-asymptotique de niveau α qui est adaptatif, c'est-à-dire qui atteint le taux de séparation minimax à un facteur logarithmique près, sur certains Besov bodies classiques et faibles simultanément. La construction reposera sur une méthode de sélection de modèles. Nous chercherons ainsi un test ϕ_α tel que, pour une certaine constante (explicite) $C \geq 1$,

$$\rho(\phi_\alpha, \mathcal{S}_1, \beta) \leq C\tilde{\rho}.$$

On obtiendra donc le résultat souhaité car on aura :

$$\tilde{\rho} \leq \underline{\rho}(\mathcal{S}_1, \alpha, \beta) \leq C\tilde{\rho}.$$

2 Bornes inférieures pour les vitesses de séparation uniformes sur des Besov bodies.

On considère un processus de Poisson N d'intensité s par rapport à une mesure μ sur $[0,1]$ tel que $d\mu(x) = Ldx$. On suppose que $s \in L^2([0,1])$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel et d la distance induite par la norme $|| \cdot ||$ définies par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx;$$

$$||f||^2 = \int_0^1 f^2(x)dx.$$

On introduit la base de Haar de $L^2([0,1])$, $\{\phi_0, \phi_{(j,k)}, j \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^j - 1\}\}$ où

$$\phi_0(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

et

$$\phi_{(j,k)}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),$$

avec $\psi(x) = \mathbb{1}_{[0,1/2[}(x) - \mathbb{1}_{[1/2,1[}(x)$.
On pose $\alpha_0 = \langle s, \phi_0 \rangle$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $k \in 0, ..., 2^j - 1$, $\alpha_{(j,k)} = \langle s, \phi_{(j,k)} \rangle$.
On définit alors les Besov bodies pour $\sigma > 0$, $R > 0$ par

$$\mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) = \{s \geq 0, s \in L^2([0,1]), s = \alpha_0\phi_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{(j,k)}\phi_{(j,k)}, \forall j \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^2_{(j,k)} \leq R^2 2^{-2j\sigma}\},$$

et plus généralement pour $p \geq 1$, $R > 0$ et $\sigma > \max(0, 1/p - 1/2)$ par

$$\mathcal{B}^\sigma_{p,\infty}(R) = \{s \geq 0, s \in L^2([0,1]), s = \alpha_0\phi_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{(j,k)}\phi_{(j,k)}, \forall j \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2^j-1} |\alpha_{(j,k)}|^p \leq R^p 2^{-pj(\sigma+1/2-1/p)}\}.$$

On définit aussi une version faible des Besov bodies pour $\gamma > 0$ et $R' > 0$ par

$$W_\gamma(R') = \{s \geq 0, s \in L^2([0,1]), s = \alpha_0\phi_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{(j,k)}\phi_{(j,k)}, \forall t > 0, \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^2_{(j,k)} \mathbb{1}_{\alpha^2_{(j,k)} \leq t} \leq R'^2 t^{2\gamma/(1+2\gamma)}\}.$$

Enfin, on note $\mathbb{L}^\infty(R'')$ l'ensemble des fonctions bornées par R''.

Le théorème suivant donne les bornes inférieures pour $\underline{\rho}(\mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) \cap W_\gamma(R') \cap \mathbb{L}^\infty(R''), \alpha, \beta)$. La preuve de ce théorème sera admise.

Théorème 2.1

Soient $R>0, R'>0$ et $R''\geq 2$, soient $\alpha,\beta\in]0,1[$ vérifiant $\alpha+\beta\leq 0,59$.

➤ Si $\sigma\geq\max(\gamma/2,\gamma/(1+2\gamma))$ alors

$$\liminf_{L\to+\infty} L^{2\sigma/(1+4\sigma)}\underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R)\cap W_\gamma(R')\cap\mathbb{L}^\infty(R''),\alpha,\beta)>0.$$

➤ Si $\sigma<\gamma/2$ et $\gamma>1/2$ alors

$$\liminf_{L\to+\infty}\left(\frac{L}{\ln L}\right)^{\gamma/(1+2\gamma)}\underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R)\cap W_\gamma(R')\cap\mathbb{L}^\infty(R''),\alpha,\beta)>0.$$

➤ Si $\sigma<\gamma/(1+2\gamma)$ et $\gamma\leq 1/2$ alors

$$\liminf_{L\to+\infty}\left(L^{1/4}\wedge L^{2\gamma/((1+4\sigma)(1+2\gamma))}\right)\underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R)\cap W_\gamma(R')\cap\mathbb{L}^\infty(R''),\alpha,\beta)>0.$$

3 Test d'homogénéité.

3.1 Construction du test par sélection de modèles.

On rappelle que $\mathcal{S}_0$ désigne l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$ et que $s\in\mathbb{L}^2([0,1])$.
Nous allons construire un test de niveau α pour tester (H_0) : "$s\in\mathcal{S}_0$" contre (H_1) : "$s\notin\mathcal{S}_0$" à partir de l'observation d'un processus de Poisson N ou des points $\{X_l, l=1,...,N_L\}$ du processus. Pour cela, on remarque tout d'abord que

$$d^2(s,\mathcal{S}_0)=||s-\mathcal{S}_0||^2_{L^2([0,1])}=\int_0^1(s(x)-\alpha_0)^2dx=\int_0^1\left(s(x)-\int_0^1 s(y)dy\right)^2dx=||s||^2-\alpha_0^2=\sum_{\lambda\in\Lambda_\infty}\alpha_\lambda^2$$

où pour tout $\lambda\in\Lambda_\infty:=\{(j,k), j\in\mathbb{N}, k\in\{0,...,2^j-1\}\},\ \alpha_\lambda:=\langle s,\phi_\lambda\rangle=\displaystyle\int_0^1\phi_\lambda(x)s(x)dx=\frac{1}{L}\int_0^1\phi_\lambda(x)s(x)d\mu(x).$

Pour tout $\lambda\in\Lambda_\infty,\ \alpha_\lambda$ peut donc être estimé par

$$\widehat{\alpha_\lambda}:=\frac{1}{L}\int_0^1\phi_\lambda(x)dN_x=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{N_L}\phi_\lambda(X_l).$$

On en déduit alors un estimateur non biaisé de α_λ^2 donné par

$$T_\lambda=\widehat{\alpha_\lambda}^2-\frac{1}{L^2}\int_0^1\phi_\lambda^2(x)dN_x=\frac{1}{L^2}\sum_{l\neq l'=1}^{N_L}\phi_\lambda(X_l)\phi_\lambda(X_{l'}).$$

Nous allons construire des estimateurs de $d^2(s,\mathcal{S}_0)=\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda_\infty}\alpha_\lambda^2$ en combinant certains $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\infty}$ et en rejetant l'hypothèse nulle si l'un de ces estimateurs est trop grand.

Pour cela, on va définir une famille de sous-ensembles de $\mathbb{L}^2([0,1])$ de dimension finie notée $(S_J)_{J\geq 1}$. Pour tout $J\geq 1$, on définit *un modèle* $S_J:=Vect(\{\phi_0,\phi_\lambda,\lambda\in\Lambda_J\})$ où $\Lambda_J=\{(j,k)\in\{0,...,J-1\}\times\{0,...,2^j-1\}\}$. On note $D_J=2^J$ la dimension de S_J et s_J la projection orthogonal de s sur le modèle S_J.
Soit $J\geq 1$.
On estime $d^2(s,\mathcal{S}_0)=||s||^2-\alpha_0^2$ par l'estimateur sans biais de $||s_J||^2-\alpha_0=\sum_{\lambda\in\Lambda_J}\alpha_\lambda^2$ donné par

$$T'_J=\sum_{\lambda\in\Lambda_J}T_\lambda.$$

On remarque que l'estimateur T'_J dépend du choix du modèle S_J.

On considère alors une collection de modèles $\{S_J, J \in \mathcal{J}\}$ où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^*$; et la collection d'estimateurs correspondante $\{T'_J, J \in \mathcal{J}\}$.

On souhaite rejeter l'hypothèse nulle s'il existe un $J \in \mathcal{J}$ pour lequel l'estimateur T'_J "est trop grand". Précisons cette procédure de décision et la zone de rejet associée au test. Pour cela, on rappelle le résultat suivant :

Lemme 3.1

La loi conditionnelle de $(X_1, ..., X_{N_L})$ sachant $N_L = n$ est la loi d'un réarrangement croissant de n variables aléatoires iid notée $(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_n)$ de densité $\frac{s(x)}{\int_0^1 s(y)dy}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors, en reprenant les notations du lemme :

$$\mathbb{P}_s\left(T'_J > q' | N_L = n\right) = \mathbb{P}_s\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_J}\frac{1}{L^2}\sum_{l\neq l'=1}^{N_L}\phi_\lambda(X_l)\phi_\lambda(X_{l'}) > q' | N_L = n\right) = \mathbb{P}_s\left(\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in\Lambda_J}\sum_{l\neq l'=1}^{n}\phi_\lambda(\tilde{X}_l)\phi_\lambda(\tilde{X}_{l'}) > q'\right).$$

Sous (H_0) :
L'intensité s est constante sur $[0,1]$ et la suite de variables aléatoires $(\tilde{X}_i)_{1\leq i\leq n}$ est iid de loi uniforme sur $[0,1]$ (donc indépendante du paramètre s). Alors, pour tout $u \in]0,1[$, on considère le quantile d'ordre $(1-u)$ associé à la loi de $T'_J|N_L = n$ (sous (H_0)) que l'on note $q_J^{'(n)}(u)$. On obtient alors, pour tout $u \in]0,1[$:

$$\mathbb{P}_{(H_0)}(T'_J - q_J^{'(n)}(u) > 0 | N_L = n) = u.$$

On définit alors la statistique

$$\mathcal{T}_\alpha = \sup_{J\in\mathcal{J}}(T'_J - q_J^{'(N_L)}(u_{J,\alpha}^{'(N_L)})),$$

associée au test statistique

$$\phi_\alpha = \mathbb{1}_{\mathcal{T}_\alpha > 0};$$

où $u_{J,\alpha}^{'(N_L)}$ reste à déterminer pour que le test soit de niveau α.

Choix de $u_{J,\alpha}^{'(N_L)}$.
On se place sous l'hypothèse nulle (H_0). Nous allons proposer deux méthodes afin de choisir convenablement la valeur de $u_{J,\alpha}^{'(N_L)}$.

Méthode 1 : Procédure de Bonferroni.
On peut considérer le test ci-dessus comme étant *un test multiple* car cette procédure fournit une collection de $|\mathcal{J}|$ tests et l'hypothèse nulle est rejetée si elle est rejetée pour au moins un des tests de la collection. Ainsi, afin de se prémunir contre l'augmentation du risque de première espèce, la procédure de Bonferroni consiste à diviser le niveau de test choisi par le nombre total de tests.
On pose donc, pour tout $J \in \mathcal{J}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{J,\alpha}^{'(n)} = \frac{\alpha}{|\mathcal{J}|}.$$

On vérifie que ce choix convient pour $s \in \mathcal{S}_0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s(\sup_{J\in\mathcal{J}}(T'_J - q_J^{'(N_L)}(u_{J,\alpha}^{'(N_L)})) > 0) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_s\left(\sup_{J\in\mathcal{J}}\left(T'_J - q_J^{'(n)}\left(\frac{\alpha}{|\mathcal{J}|}\right)\right) > 0 | N_L = n\right)\mathbb{P}_s(N_L = n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_s\left(\bigcup_{J\in\mathcal{J}}\left(T'_J - q_J^{'(n)}\left(\frac{\alpha}{|\mathcal{J}|}\right)\right) > 0 | N_L = n\right)\mathbb{P}_s(N_L = n) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{J\in\mathcal{J}} \underbrace{\mathbb{P}_s\left(T'_J - q_J^{'(n)}\left(\frac{\alpha}{|\mathcal{J}|}\right) > 0 | N_L = n\right)}_{=\frac{\alpha}{|\mathcal{J}|}}\mathbb{P}_s(N_L = n) \\
&\leq \alpha.
\end{aligned}$$

Méthode 2 : d'après l'article [2]
L'article suggère de poser, pour tout $J \in \mathcal{J}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{J,\alpha}^{'(n)} = e^{-W_J} u_\alpha^{(n)}$$

où

$$u_\alpha^{(n)} = \sup\{u \in]0,1[, \sup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathbb{P}_s\left(\sup_{J\in\mathcal{J}}(T'_J - q_J^{'(n)}(ue^{-W_J})) > 0 | N_L = n\right) \leq \alpha\},$$

et $\{W_J, J \in \mathcal{J}\}$ une famille de poids positifs tel que $\sum_{J\in\mathcal{J}} e^{-W_J} \leq 1$.

Par ailleurs, ce choix de quantile est meilleur en pratique car il est moins conservatif que celui donné par la procédure de Bonferroni. En effet, montrons que ce quantile est d'ordre exactement α.
On pose $\bar{F}_J$ la fonction de répartition continue de T'_J sous H_0 sachant $N_L = n$. Soit $s \in \mathcal{S}_0$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s\left(\sup_{J\in\mathcal{J}}(T'_J - q_J^{\prime(n)}(u_{J,\alpha}^{\prime(n)})) > 0 \mid N_L = n\right) &= \mathbb{P}_s(\exists J \in \mathcal{J},\ T_{J'} > \bar{F}_J^{-1}(u_{J,\alpha}^{\prime(n)}) \mid N_L = n) \\
&= \mathbb{P}_s(\exists J \in \mathcal{J},\ \bar{F}_J(T'_J) > e^{-W_J}u_\alpha^{(n)} \mid N_L = n) \\
&= \mathbb{P}_s(\max_{J\in\mathcal{J}}\ e^{W_J}\bar{F}_J(T'_J) > u_\alpha^{(n)} \mid N_L = n) \\
&= 1 - F_{\mathcal{J}}(u_\alpha^{(n)})
\end{aligned}$$

où $F_{\mathcal{J}}$ est la fonction de répartition de $\max_{J\in\mathcal{J}} e^{W_J}\bar{F}_J(T'_J)$ sous (H_0) sachant $N_L = n$. De plus,

$$\begin{aligned}
u_\alpha^{(n)} &= \sup\{u \in]0,1[, \sup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathbb{P}_s\left(\exists J \in \mathcal{J},\ (T'_J - q_J^{'(n)}(ue^{-W_J})) > 0 | N_L = n\right) \leq \alpha\} \\
&= \sup\{u \in]0,1[, \sup_{s\in\mathcal{S}_0} \mathbb{P}_s\left(\exists J \in \mathcal{J},\ \bar{F}_J(T'_J)e^{W_J} > u | N_L = n\right) \leq \alpha\} \\
&= \sup\{u \in]0,1[,\ 1 - F_{\mathcal{J}}(u) \leq \alpha\} \\
&= \sup\{u \in]0,1[,\ F_{\mathcal{J}}(u) \geq 1 - \alpha\} \\
&= F_{\mathcal{J}}^{-1}(1-\alpha) \quad \text{car } F_{\mathcal{J}} \text{ est continue.}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}_s\left(\sup_{J\in\mathcal{J}}(T'_J - q_J^{\prime(n)}(u_{J,\alpha}^{\prime(n)})) > 0 \mid N_L = n\right) = \alpha.$$

Remarque 3.2

Dans un cadre plus général (où les fonctions de répartition ne sont pas continues), on peut quand même montrer que

$$\mathbb{P}_s\left(\sup_{J\in\mathcal{J}}(T'_J - q'^{(n)}_J(u'^{(n)}_{J,\alpha})) > 0 \mid N_L = n\right) \leq 1 - F_{\mathcal{J}}(\bar{F}_J^{-1}(1-\alpha)) \leq \alpha.$$

3.2 Contrôle de l'erreur de seconde espèce.

Le but de cette section est de fournir une condition sur l'alternative (H_1) afin que le test de niveau α construit précédemment ait une erreur de seconde espèce de niveau β fixée au préalable.

3.3 Le théorème.

Théorème 3.3

On suppose que $s \in \mathbb{L}^\infty([0,1])$ et que $L \geq 1$. On fixe les niveaux $\alpha, \beta \in]0,1[$, et on considère le test ϕ_α de niveau α construit dans la section précédente. S'il existe des constantes $C_1(\alpha,\beta,||s||_\infty)$, $C_2(\alpha,\beta), C_3, C_4(\beta)$ et C_5 tel que s vérifie

$$d^2(s,\mathcal{S}_0) > \inf_{J\in\mathcal{J}}\{||s-s_J||^2 + C_1(\alpha,\beta,||s||_\infty)\frac{\sqrt{D_J}}{L} + C_2(\alpha,\beta)\frac{D_J}{L^2} + \left(C_3\int_0^1 s(x)dx + C_4(\beta)\right)\left(\frac{\sqrt{D_J W_J}}{L} + \frac{W_J}{L}\right) + C_5\frac{D_J W_J^2}{L^2}\},$$

alors

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta.$$

3.4 Démonstration.

La démonstration que nous allons présenter s'adapte pour d'autres tests. Afin d'obtenir une démonstration plus générale, nous introduisons les notations suivantes.
Pour tout sous-ensemble Λ de Λ_∞, on note S_Λ le sous-espace engendré par $\{\phi_0, \phi_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$, s_Λ la projection orthogonale de s sur S_Λ et on introduit l'estimateur $T''_\Lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} T_\Lambda$ de $||s_\Lambda||^2 - \alpha_0^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda^2$. Notre test s'écrit donc $\phi_\alpha = \mathbb{1}_{\mathcal{T}_\alpha > 0}$ où

$$\mathcal{T}_\alpha = \sup_{\Lambda\in\mathcal{C}}(T''_\Lambda - t''^{(N_L)}_{\Lambda,\alpha}),$$

avec $\mathcal{C}$ une collection finie de sous-ensembles de Λ_∞.

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin de trois lemmes techniques dont les preuves seront admises. Ces lemmes nous permettront de prouver une proposition intermédiaire que nous utiliserons afin de démontrer, dans une dernière étape, le théorème.

Nous énonçons et démontrons à présent la proposition suivante :

Proposition 3.4

Soient $s \in \mathbb{L}^\infty([0,1])$ et $\alpha,\beta \in]0,1[$. On suppose qu'il existe une quantité positive $A_{\Lambda,\alpha,\beta}$ telle que

$$\mathbb{P}_s(t''^{(N_L)}_{\Lambda,\alpha} \geq A_{\Lambda,\alpha,\beta}) \leq \frac{\beta}{3}.$$

S'il existe des constantes positives $C_1(\beta,||s||_\infty)$ et $C_2(\beta)$ telles que

$$d^2(s,\mathcal{S}_0) > \inf_{\Lambda\in\mathcal{C}}\{||s-s_\Lambda||^2 + C_1(\beta,||s||_\infty)\left(\frac{\sqrt{D_\Lambda}}{L} + \frac{\sqrt{E_\Lambda}}{L^{3/2}}\right) + C_2(\beta)\frac{E_\Lambda}{L^2} + A_{\Lambda,\alpha,\beta}\},$$

alors

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta.$$

Démonstration.
Soient α et β dans $]0,1[$, et s une intensité bornée dans $[0,1]$. On a

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) = \mathbb{P}_s(\mathcal{T}_\alpha \leq 0) = \mathbb{P}_s(\forall \Lambda \in \mathcal{C}, T_\Lambda^{''} \leq t_{\Lambda,\alpha}^{''(N_L)}) \leq \inf_{\Lambda \in \mathcal{C}} \mathbb{P}_s(T_\Lambda^{''} \leq t_{\Lambda,\alpha}^{''(N_L)}).$$

Pour tout $\Lambda \in \mathcal{C}$, on peut écrire $T_\Lambda^{''}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} T_\Lambda^{''} &= \frac{1}{L^2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left[\left(\int_0^1 \phi_\lambda(x) dN_x \right)^2 - \int_0^1 \phi_\lambda^2(x) dN_x \right] \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left[\left(\int_0^1 \phi_\lambda(x)(dN_x - s(x)Ldx) \right)^2 + 2 \int_0^1 \phi_\lambda(x) dN_x \int_0^1 \phi_\lambda(x) s(x) Ldx \right] \\ &- \frac{1}{L^2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left[\left(\int_0^1 \phi_\lambda(x) s(x) Ldx \right)^2 + \int_0^1 \phi_\lambda^2(x) dN_x \right]. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$T_\Lambda^{''} = U_\Lambda + V_\Lambda + ||s_\Lambda||^2 - \alpha_0^2,$$

où l'on a posé,

$$U_\Lambda = \frac{1}{L^2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left[\left(\int_0^1 \phi_\lambda(x)(dN_x - s(x)Ldx) \right)^2 - \int_0^1 \phi_\lambda^2(x) dN_x \right],$$

et

$$V_\Lambda = \frac{2}{L} \int_0^1 (s_\Lambda(x) - \alpha_0 \phi_0(x))(dN_x - s(x)Ldx).$$

Comme $d^2(s, \mathcal{S}_0) = ||s - s_\Lambda||^2 + ||s_\Lambda||^2 - \alpha_0^2$, on a :

$$T_\Lambda^{''} = U_\Lambda + V_\Lambda + d^2(s, \mathcal{S}_0) - ||s - s_\Lambda||^2.$$

Donc

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \inf_{\Lambda \in \mathcal{C}} \mathbb{P}_s(U_\Lambda + V_\Lambda + d^2(s, \mathcal{S}_0) \leq ||s - s_\Lambda||^2 + t_{\Lambda,\alpha}^{''(N_L)}).$$

On dispose à présent des deux lemmes suivants :

Lemme 3.5

Il existe une constante positive C tel que pour tout $\Lambda \in \mathcal{C}$ et pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}_s \left(-U_\Lambda \geq C \left(||s||_\infty \frac{\sqrt{D_\Lambda}}{L} \sqrt{x} + ||s||_\infty \frac{\sqrt{D_\Lambda}}{L} x + \sqrt{\frac{||s||_\infty E_\Lambda}{L^3}} x^{3/2} + \frac{E_\Lambda}{L^2} x^2 \right) \right) \leq 2,77 e^{-x}.$$

Lemme 3.6

Il existe une constante positive C tel que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}_s \left(-V_\Lambda \geq \frac{1}{2} ||s - \alpha_0 \phi_0||^2 - \frac{1}{2} ||s - s_\Lambda||^2 + \frac{C ||s||_\infty}{L} x \right) \leq e^{-x}.$$

D'après les lemmes précédents, il existe des quantités positives $A^{(1)}_{\Lambda,\beta}$ et $A^{(2)}_{\Lambda,\beta}$ telles que [2]
$\mathbb{P}_s(U_\Lambda \leq -A^{(1)}_{\Lambda,\beta}) \leq \dfrac{\beta}{3}$,
$\mathbb{P}_s(V_\Lambda \leq -A^{(2)}_{\Lambda,\beta}) \leq \dfrac{\beta}{3}$.
Par hypothèse, on a aussi

$$\mathbb{P}_s(t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha} \geq A_{\Lambda,\alpha,\beta}) \leq \frac{\beta}{3}.$$

Ainsi, dès lors qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{C}$ tel que

$$d^2(s,\mathcal{S}_0) > ||s-s_\Lambda||^2 + A^{(1)}_{\Lambda,\beta} + A^{(2)}_{\Lambda,\beta} + A_{\Lambda,\alpha,\beta},$$

on a

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta.$$

En effet, supposons qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{C}$ tel que $d^2(s,\mathcal{S}_0) > ||s-s_\Lambda||^2 + A^{(1)}_{\Lambda,\beta} + A^{(2)}_{\Lambda,\beta} + A_{\Lambda,\alpha,\beta}$.
Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s(U_\Lambda + V_\Lambda + d^2(s,\mathcal{S}_0) \leq ||s-s_\Lambda||^2 + t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha}) &= \underbrace{\mathbb{P}_s(\{U_\Lambda + V_\Lambda + d^2(s,\mathcal{S}_0) \leq ||s-s_\Lambda||^2 + t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha}\} \cap \{U_\Lambda \leq -A^{(1)}_{\Lambda,\beta}\})}_{\leq \frac{\beta}{3}} \\
&+ \mathbb{P}_s(\{U_\Lambda + V_\Lambda + d^2(s,\mathcal{S}_0) \leq ||s-s_\Lambda||^2 + t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha}\} \cap \{U_\Lambda \geq -A^{(1)}_{\Lambda,\beta}\}) \\
&\leq \frac{\beta}{3} + \mathbb{P}_s(-A^{(1)}_{\Lambda,\beta} + V_\Lambda + d^2(s,\mathcal{S}_0) \leq ||s-s_\Lambda||^2 + t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha}) \\
&\leq \frac{\beta}{3} + \mathbb{P}_s(\{-A^{(1)}_{\Lambda,\beta} + V_\Lambda + d^2(s,\mathcal{S}_0) \leq ||s-s_\Lambda||^2 + t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha}\} \cap \{V_\Lambda \leq -A^{(2)}_{\Lambda,\beta}\}) \\
&+ \mathbb{P}_s(\{-A^{(1)}_{\Lambda,\beta} + V_\Lambda + d^2(s,\mathcal{S}_0) \leq ||s-s_\Lambda||^2 + t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha}\} \cap \{V_\Lambda > -A^{(2)}_{\Lambda,\beta}\}) \\
&\leq \frac{2\beta}{3} + \mathbb{P}_s(||s-s_\Lambda||^2 + A^{(1)}_{\Lambda,\beta} + A^{(2)}_{\Lambda,\beta} + A_{\Lambda,\alpha,\beta} \leq d^2(s,\mathcal{S}_0) \leq ||s-s_\Lambda||^2 + A^{(1)}_{\Lambda,\beta} + A^{(2)}_{\Lambda,\beta} + t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha})) \\
&\leq \frac{2\beta}{3} + \mathbb{P}_s(t^{''(N_L)}_{\Lambda,\alpha}) \geq A_{\Lambda,\alpha,\beta}) \leq \beta.
\end{aligned}$$

□

Pour prouver le théorème, il reste à déterminer une valeur de $A_{\Lambda,\alpha,\beta}$. Pour cela, on a besoin du troisième lemme technique suivant :

Lemme 3.7

Soient $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_n$ des variables aléatoires iid uniformément distribuées sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda \subset \Lambda_\infty$, on rappelle que

$$T^{''}_{\Lambda,n} = \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{l\neq l'=1}^{n} \phi_\lambda(\tilde{X}_l)\phi_\lambda(\tilde{X}_{l'}),$$

et que D_Λ est la dimension de S_Λ. On pose $E_\Lambda = \sum_{j/(j,k)\in\Lambda} 2^j$.
Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(T^{''}_{\Lambda,n} \geq \frac{Cn}{L^2}\left(\sqrt{D_\Lambda x} + x + \frac{E_\Lambda x^2}{n \vee 1}\right)\right) \leq 2,77e^{-x}.$$

2. une valeur possible de $A^{(1)}_{\Lambda,\beta}$ est obtenue en prenant $x = \ln(8.31/\beta)$ dans le lemme 3.5 et une valeur de $A^{(2)}_{\Lambda,\beta}$ est obtenue en prenant $x = \ln(3/\beta)$ dans le lemme 3.6.

On peut à présent démontrer le théorème.

Démonstration.
On remarque tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{J,\alpha}^{'(n)}$ défini par $u_{J,\alpha}^{'(n)} = e^{-W_J} u_\alpha^{(n)}$ vérifie $u_{J,\alpha}^{'(n)} \geq \alpha e^{-W_J}$ et donc on a :

$$t_{\Lambda_J,\alpha}^{''(n)} \leq q_J^{'(n)}(\alpha e^{-W_J}).$$

Afin d'utiliser la proposition précédente, nous allons déterminer une constante positive $A_{J,\alpha,\beta}$ telle que

$$\mathbb{P}_s(t_{\Lambda_J,\alpha}^{''(n)} \geq A_{J,\alpha,\beta}) \leq \frac{\beta}{3}.$$

Or

$$\{t_{\Lambda,\alpha}^{''(N_L)} \geq A_{\Lambda,\alpha,\beta}\} \subset \{q_J^{'(N_L)}(\alpha e^{-W_J}) \geq A_{\Lambda,\alpha,\beta}\},$$

donc on va déterminer $A_{\Lambda,\alpha,\beta}$ tel que

$$\mathbb{P}_s(q_J^{'(n)}(\alpha e^{-W_J}) \geq A_{J,\alpha,\beta}) \leq \frac{\beta}{3}.$$

Tout d'abord, on applique le lemme précédent avec $\Lambda = \Lambda_J$ (on remarque au passage que $D_{\Lambda_J} = E_{\Lambda_J} = D_J$) et pour $x = \ln(2,77/\alpha) + W_J$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}\left(T_{\Lambda,n}^{''} \geq C\frac{n}{L^2}\left(\sqrt{D_J(\ln(2,77/\alpha)+W_J)} + \ln(2,77/\alpha) + W_J + \frac{D_J}{n \vee 1}(\ln(2,77/\alpha)+W_J)^2\right)\right) \leq \alpha e^{-W_J}.$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\mathbb{P}(T_{\Lambda,n}^{''} \geq t_{\Lambda_J,\alpha}^{''(n)}) = u_{J,\alpha}^{'(n)} \geq \alpha e^{-W_J}.$$

On a donc démontré l'existence d'une constante $C > 0$ tel que

$$q_J^{'(n)}(\alpha e^{-W_J}) \leq C\frac{n}{L^2}\left(\sqrt{D_J(\ln(2,77/\alpha)+W_J)} + \ln(2,77/\alpha) + W_J + \frac{D_J}{n \vee 1}(\ln(2,77/\alpha)+W_J)^2\right).$$

En particulier, on a :

$$q_J^{'(N_L)}(\alpha e^{-W_J}) \leq C\frac{N_L}{L^2}\left(\sqrt{D_J(\ln(2,77/\alpha)+W_J)} + \ln(2,77/\alpha) + W_J\right) + C\frac{D_J}{L^2}(\ln(2,77/\alpha)+W_J)^2.$$

D'après l'inégalité de Bernstein, pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}_s\left(N_L \geq \int_0^1 s(x)Ldx + \sqrt{2\int_0^1 s(x)Ldxu} + \frac{1}{3}u\right) \leq e^{-u}.$$

Ainsi, comme on a

$$\mathbb{P}_s(q_J^{'(N_L)}(\alpha e^{-W_J}) \geq A_{J,\alpha,\beta}) \leq \mathbb{P}_s\left(C\frac{N_L}{L^2}\left(\sqrt{D_J(\ln(2,77/\alpha)+W_J)} + \ln(2,77/\alpha) + W_J\right) + C\frac{D_J}{L^2}(\ln(2,77/\alpha)+W_J)^2 \geq A_{J,\alpha,\beta}\right)$$

on trouve, pour $u = 3\ln(3/\beta)$, une valeur possible de $A_{\Lambda_J,\alpha,\beta}$:

$$A_{\Lambda_J,\alpha,\beta} = C\frac{\int_0^1 s(x)Ldx + \ln(3/\beta)}{L^2}\left(\sqrt{D_J(\ln(2,77/\alpha)+W_J)} + \ln(2,77/\alpha) + W_J\right) + C\frac{D_J}{L^2}(\ln(2,77/\alpha)+W_J)^2.$$

On applique alors la proposition précédente, le théorème est prouvé.

□

3.5 Evaluation du taux de séparation uniforme.

Dans cette section, nous allons évaluer le taux de séparation uniforme $\rho(\phi_\alpha, \mathcal{B}_{2,\infty}^\sigma(R) \cap \mathbb{L}^\infty(R''), \beta)$. On notera $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Proposition 3.8

On suppose que $\ln\ln L \geq 1$. On fixe les niveaux $\alpha, \beta \in]0,1[$ et on considère ϕ_α, le test défini précédemment avec $\mathcal{J} = \{1, ..., \lfloor \log_2(L^2/(\ln\ln L)^3 \rfloor\}$ et $W_J = \ln|\mathcal{J}|$ pour tout $J \in \mathcal{J}$.
Pour tout $\sigma > 0, R > 0$ et $R'' > 0$, s'il existe une constante $C(\alpha, \beta, R'', \sigma)$ tel que pour tout $s \in \mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) \cap \mathbb{L}^\infty(R'')$ satisfaisant

$$d^2(s, \mathcal{S}_0) > C(\alpha, \beta, R'', \sigma)\left(R^{2/(4\sigma+1)}\left(\frac{\sqrt{\ln\ln L}}{L}\right)^{4\sigma/(4\sigma+1)} + R^2\left(\frac{(\ln\ln L)^3}{L^2}\right)^{2\sigma} + \frac{\ln\ln L}{L}\right),$$

alors

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta.$$

En particulier, il existe des constantes positives $L_0(\sigma)$ et $C(\alpha, \beta, R, R'', \sigma)$ telles que, si $L > L_0(\sigma)$, alors

$$\rho(\phi_\alpha, \mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) \cap \mathbb{L}^\infty(R''), \beta) \leq C(\alpha, \beta, R, R'', \sigma)\left(\frac{\sqrt{\ln\ln L}}{L}\right)^{2\sigma/(4\sigma+1)}.$$

Démonstration. (Idées de la preuve)
On suppose que $s \in \mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) \cap \mathbb{L}^\infty(R'')$.
L'objectif est de majorer la borne obtenue dans le Théorème 3.3 sous les hypothèses de la proposition 3.8.
Pour cela, on remarque tout d'abord que les fonctions de $\mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R)$ peuvent être approchées par leurs projections sur les sous-espaces de la collection $\{S_J, J \in \mathcal{J}\}$; pour tout $s \in \mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R)$,

$$||s - s_J||^2 \leq c(\sigma) R^2 D_J^{-2\sigma}.$$

De plus, comme la constante $C_1(\alpha, \beta, ||s||_\infty)$ peut être remplacée par $C_1(\alpha, \beta, R'')$, il suffit d'obtenir une majoration pour

$$C(\alpha, \beta, R'', \sigma) \inf_{J \in \mathcal{J}} \{R^2 D_J^{-2\sigma} + \frac{\sqrt{D_J}}{L} + \frac{D_J}{L^2} + \frac{\sqrt{D_J W_J}}{L} + \frac{W_J}{L} + \frac{D_J W_J^2}{L^2}\}.$$

Il reste à utiliser les hypothèses sur W_J, $\mathcal{J}$, L et D_J afin d'obtenir la borne souhaitée. □

Remarque 3.9

➤ On a montré que le test que nous avons construit est adaptatif. En effet, pour L suffisament grand, le test atteint la borne inférieure déterminée précédemment pour le taux de séparation minimax simultanément sur tous les espaces $\mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) \cap W_\gamma(R') \cap \mathbb{L}^\infty(R'')$ avec $\sigma \geq \max(\gamma/2, \gamma/(1+2\gamma))$ à un facteur logarithmique près. De plus, comme $\mathcal{B}^\sigma_{p,\infty}(R) \subset \mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R)$ dès que $p > 2$, la proposition précédente fournit une borne supérieure pour le taux de séparation uniforme $\rho(\phi_\alpha, \mathcal{B}_{p,\infty}(R) \cap \mathbb{L}^\infty(R''), \beta)$ quand $p > 2$.

➤ Ce test ne permet néanmoins pas d'obtenir un taux de séparation optimal dans le cas où $\sigma < \gamma/2$ et $\gamma > 1/2$. Pour cela, il faut construire un autre test, basé sur une méthode de seuillage.

➤ L'article présente également une étude numérique des deux tests construits ; par la méthode de Monte-Carlo, on peut réaliser des simulations afin d'estimer la puissance des tests sous différentes alternatives.

Références

[1] M. Fromont, B. Laurent et P. Reynaud-Bouret. Adaptative tests of homogeneity for a Poisson process. *Annales de l'IHP*. (2011)

[2] M. Fromont et B. Laurent. Adaptative goodness-of-fit tests in a density model. *Ann. Statist.* (2006)