

# Introduction aux processus d'exclusions

---

GRELA Fabrice

## **Rapport de stage**

*Stage effectué du 23 mai au 8 juillet 2016*

Institut Camille Jordan  
Université de Lyon 1

Maître de stage : Christophe POQUET

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Prérequis.</b>	<b>4</b>
1.1	Rappels. . . . .	4
1.1.1	Théorème de Dynkin . . . . .	4
1.1.2	Chaîne de Markov en temps discret . . . . .	4
1.2	Quelques propriétés de la loi exponentielle. . . . .	5
1.3	La topologie de Skorohod sur l'espace des trajectoires. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Chaîne de Markov en temps continu.</b>	<b>10</b>
2.1	Construction et définition d'une chaîne de Markov en temps continu. . . . .	10
2.2	Générateur de Markov. . . . .	12
2.2.1	Définitions . . . . .	12
2.2.2	Générateur de Markov, matrice de transitions et matrice de sauts . . . . .	17
2.2.3	Construction alternative d'une chaîne de Markov en temps continu . . . . .	18
2.3	Définitions générales des processus markoviens. . . . .	19
<b>3</b>	<b>Processus de Poisson.</b>	<b>21</b>
3.1	Définitions et constructions du processus de Poisson. . . . .	21
3.2	Propriétés du processus de Poisson. . . . .	23
3.3	Construction d'une chaîne de Markov en temps continu à partir d'un processus de Poisson. . . . .	30
<b>4</b>	<b>Processus d'exclusion.</b>	<b>33</b>
4.1	Construction du processus d'exclusion. . . . .	33
4.1.1	Idées générales . . . . .	33
4.1.2	Représentation graphique du processus d'exclusion . . . . .	34
4.1.3	L'argument de percolation . . . . .	35
4.1.4	Construction du processus avec un nombre fini de temps de saut . . . . .	37
4.1.5	Construction du processus en tout temps . . . . .	38
4.2	Propriétés de la construction. . . . .	39
4.3	Illustration numérique du processus d'exclusion. . . . .	44

## Introduction.

Le processus d'exclusion est un modèle très étudié en physique statistique hors équilibre. Il décrit l'évolution d'une infinité de particules indistinguables qui interagissent entre-elles selon une dynamique stochastique sur l'ensemble des sites d'un réseau  $\mathbb{Z}^d$  où  $d \geq 1$ .

L'objectif de ce stage est de comprendre les mécanismes mis en jeu dans la construction rigoureuse d'un tel processus afin d'en démontrer quelques propriétés. Afin de pouvoir définir précisément ce processus, nous allons tout d'abord définir les chaînes de Markov en temps continu puis nous intéresser plus particulièrement aux processus de Poisson et à certaines de ses propriétés. Par la suite, nous nous intéresserons à la construction du processus d'exclusion et à l'étude de certaines de ses propriétés (mesurabilité, continuité...). Cette construction fera appel à des résultats généraux de probabilité et de topologie (métrique de Skorohod) traités dans la première section. Pour conclure, nous proposerons une illustration numérique du processus d'exclusion afin d'observer sa dynamique.

Enfin, je tiens à remercier mon maître de stage, Monsieur Christophe POQUET, pour sa disponibilité, pour le sujet très intéressant qu'il m'a proposé et pour l'autonomie qu'il m'a laissé dans l'organisation de mon travail. Ce sujet a, en effet, été très formateur car il m'a permis de compléter mon cours sur les chaînes de Markov en les étudiant en temps continu, de découvrir la topologie de Skorohod, de travailler sur un processus qui est l'objet de recherches actuelles et de simuler numériquement, via Scilab, ce processus.

Ce stage est basé sur la compréhension des premiers chapitres du livre [1], qui servira de référence principale pour l'ensemble de ce rapport.

# 1 Prérequis.

## 1.1 Rappels.

Dans cette section, nous allons donner certaines définitions et théorèmes utiles pour les prochaines sections. Les démonstrations ne seront pas rappelées.

### 1.1.1 Théorème de Dynkin

**Définition 1.1 :** *Classe monotone ou  $\lambda$ -système.*

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{M}$  une famille de parties de  $X$ .

On dit que  $\mathcal{M}$  est une classe monotone si

1.  $X \subseteq \mathcal{M}$ ;
2.  $A, B \in \mathcal{M}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$ ;
3.  $\mathcal{M}$  est stable par union monotone croissante :

$$A_i \in \mathcal{M}, A_i \subset A_{i+1} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}.$$

**Définition 1.2 :**  *$\Pi$ -système.*

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{C}$  une famille de parties de  $X$ .

On dit que  $\mathcal{C}$  est un  $\Pi$ -système si  $\mathcal{C}$  est stable par intersections finies :

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}.$$

**Théorème 1.3 :** *Théorème de Dynkin.*

Si  $\mathcal{C}$  est un  $\Pi$ -système et  $\mathcal{M}$  un  $\lambda$ -système tel que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$  alors  $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$ .

### 1.1.2 Chaîne de Markov en temps discret

Nous allons rappeler la définition d'un processus stochastique et d'une chaîne de Markov en temps discret.

**Définition 1.4 :** *Processus stochastique*

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. On note  $E$  un espace métrique muni de la tribu borélienne.

Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in T}$  est une famille de variables aléatoires (c'est-à-dire des applications mesurables)  $X_t$ , définie sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $E$  et indexée par un ensemble  $T$ .

Soit  $E$  un espace dénombrable.

Tout élément  $x \in E$  est appelé *état* et  $E$  est appelé *espace d'états*.

On définit une loi de probabilité  $\mu = (\mu_x \mid x \in E)$  sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Soit  $P = (p(i, j))_{i, j \in E}$  une *matrice stochastique*.

**Définition 1.5 : Chaîne de Markov en temps discret**

On dit qu'une suite de v.a.  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov de loi initial  $\mu$  et de matrice de transitions  $P$  (noté  $\text{Markov}(\lambda, P)$ ) si pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ ,

1.  $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = \mu_{x_0}$ ;
2.  $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = p(x_n, x_{n+1})$ .

**Proposition 1.6 : Propriété de Markov**

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov en temps discret. Alors pour tout  $n \geq 0$ , pour toute suite d'états  $(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}) \in E^{n+2}$ , on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

**Notation :**

On note  $\mathbb{P}^x(B) = \mathbb{P}(B \mid X_0 = x)$  pour tout  $B \in \mathcal{F}$ .

**1.2 Quelques propriétés de la loi exponentielle.**

Soit  $X$  une variable aléatoire (v.a.) suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , notée  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

Sa densité est :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Sa fonction de répartition vaut :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

La loi exponentielle va jouer un rôle fondamental dans les chaînes de Markov en temps continu grâce à la propriété suivante :

**Proposition 1.7 : Propriété sans mémoire des lois exponentielles.**

Une v.a.  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et de fonction de répartition continue suit une loi exponentielle si et seulement si pour tous réels  $s, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

*Démonstration.*

Supposons que  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ . Alors

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Supposons alors que  $X$  possède la propriété sans mémoire et que  $\mathbb{P}(X > s) > 0$ .

Posons  $g(t) := \mathbb{P}(X > t)$ . On a alors :

$$g(s + t) = g(s)g(t) \quad \forall s, t \geq 0.$$

On suppose  $X > 0$  pour que  $g\left(\frac{1}{n}\right) > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, on montre que :

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

Donc il existe  $\lambda \in [0, +\infty[$  tel que  $g(1) = e^{-\lambda}$ . De même, on peut montrer que, pour tout  $p, q \geq 1$ ,

$$g(p \setminus q) = g(1 \setminus q)^p = g(1)^{p \setminus q}.$$

Donc  $g(r) = e^{-\lambda r}$  pour tout rationnels  $r > 0$ . Puis, par un argument de densité, on montre que  $g(x) = e^{-\lambda x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$

### Proposition 1.8

Soit  $E$  un ensemble dénombrable et soit  $(T_k)_{k \in E}$  une suite de v.a. indépendantes tel que  $T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$ .

Posons  $0 < \lambda := \sum_{k \in E} \lambda_k < \infty$  et  $T := \inf_k T_k$ .

Alors cet infimum est atteint pour une unique v.a.  $K$  à valeurs dans  $E$ , avec probabilité 1. De plus,  $T$  et  $K$  sont indépendantes avec  $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$  et  $\mathbb{P}(K = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda}$ .

*Démonstration.*

Posons  $K = k$  si  $T_k < T_j$  pour tout  $j \neq k$ , (sinon  $K$  n'est pas défini). Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k \text{ et } T \geq t) &= \mathbb{P}(T_k \geq t \text{ et } T_j > T_k \text{ pour tout } j \neq k) \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \mathbb{P}(T_j > s \text{ pour tout } j \neq k) ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k s} \prod_{j \neq k} e^{-\lambda_j s} ds \\ &= \int_t^\infty \lambda_k e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

En sommant sur  $k \in E$ , on en déduit que  $\mathbb{P}(T \geq t) = e^{-\lambda t}$  et que les v.a.  $T$  et  $K$  sont indépendantes.  $\square$

### Proposition 1.9

La somme de  $n$  v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  suit la loi gamma de paramètres  $n$  et  $\lambda$  dont la densité est :

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

## 1.3 La topologie de Skorohod sur l'espace des trajectoires.

Dans cette section, nous allons définir la métrique de Skorohod et énoncer certaines propriétés utiles pour les prochaines sections. Les preuves de cette section ont été étudiées dans le détail mais ne seront pas rédigées dans ce rapport. Cette section s'appuie sur [3].

On note  $Y$  un espace métrique séparable.

L'objectif est de généraliser la topologie de  $\mathcal{C}([0, 1], Y)$  aux fonctions continues à droite et qui admettent une limite à gauche. On dira que ces applications sont des fonctions *cadlag* et on notera l'ensemble de ces fonctions de  $[0, 1]$  dans  $Y : D_{[0,1]}$ .

De manière heuristique, dans  $\mathcal{C}([0, 1], Y)$ , deux fonctions  $f$  et  $g$  sont proches si  $\sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$  est "petit". On ne peut pas généraliser directement cette idée dans  $D_{[0,1]}$  car les discontinuités peuvent rendre la norme supérieure très grande.

On va donc introduire une métrique qui permet des petites déformations en temps. On note  $\Lambda$  l'ensemble des applications de  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  strictement croissantes, continues et tel que  $\lambda(0) = 0$  et  $\lambda(1) = 1$ . Ces fonctions vont nous permettre de modifier l'échelle des abscisses des fonctions *cadlag*.

Ainsi, si on note  $d_s$  la métrique sur  $D_{[0,1]}$ , on a pour tout  $f, g \in D_{[0,1]}$ , pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $d_s(f, g) < \epsilon$  s'il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\underbrace{\|\lambda - id\|_\infty < \epsilon}_{\text{on change l'échelle de temps d'au plus } \epsilon}$  et  $\underbrace{\|f - g \circ \lambda\|_\infty < \epsilon}_{\text{on change l'échelle temporelle de } g}$ .

**Proposition 1.10 : Métrique de Skorohod**

Pour tout  $f, g \in D_{[0,1]}$ ,

$$d_s(f, g) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - id\| \vee \|f - g \circ \lambda\| \}$$

défini une métrique sur  $D_{[0,1]}$ , appelée *métrique de Skorohod*.

**Définition 1.11 : Convergence dans  $D_{[0,1]}$ .**

On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f$  au sens de Skorohod ssi il existe une suite  $(\lambda_n)_n \in (\Lambda)^\mathbb{N}$  tel que  $\lim_n f \circ \lambda_n(t) = f(t)$  uniformément en  $t$  et  $\lim_n \lambda_n(t) = t$  uniformément en  $t$ .

**Remarque 1.12**

L'espace  $D_{[0,1]}$  n'est pas complet pour la métrique  $d_s$ .

On va donc introduire une métrique  $d_s^o$ , équivalente à  $d_s$  pour laquelle  $D_{[0,1]}$  est complet.

L'idée est de rendre la déformation en temps plus proche de la fonction identité : on souhaite que la pente  $\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s}$  soit proche de 1.

On définit alors :

$$\|\lambda\|^o := \sup_{s < t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|.$$

On a alors pour tout  $f, g \in D_{[0,1]}$ , pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $d_s(f, g) < \epsilon$  s'il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\|\lambda\|^o < \epsilon$  et  $\|f - g \circ \lambda\|_\infty < \epsilon$ .

**Proposition 1.13 : Métrique (équivalente) de Skorohod**

Pour tout  $f, g \in D_{[0,1]}$ ,

$$d_s^o(f, g) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda\|^o \vee \|f - g \circ \lambda\| \}$$

défini une métrique sur  $D_{[0,1]}$ .

**Proposition 1.14**

Les métriques  $d_s$  et  $d_s^o$  sont équivalentes sur  $D_{[0,1]}$ .

**Théorème 1.15**

$(D_{[0,1]}, d_s^o)$  est un espace complet.

Nous allons chercher à étendre cette métrique sur  $D_\infty := D_{[0,\infty]}$ , c'est-à-dire sur l'ensemble des fonctions de  $[0, \infty[$  dans  $Y$  où  $Y$  est un espace métrique séparable.

Introduisons d'abord quelques notations :

- Pour tout  $t > 0$ ,  $D_t := D_{[0,t]}$  ;
- De la même manière que pour  $D_{[0,1]}$ , on définit  $\|f\|_t := \sup_{s \leq t} |f(s)|$ ,  $\Lambda_t$ ,  $\|\lambda\|_t^o$ ,  $d_t$  (qui définit la métrique  $d_s$  pour des fonctions de  $D_t$ ),  $d_t^o$ ...
- $\Lambda_\infty$  l'ensemble des fonctions continues, croissantes de  $[0, \infty[$  dans  $[0, \infty[$ .

**Remarque 1.16**

Si  $f \in D_\infty$ , on peut considérer  $f$  comme un élément de  $D_t$  par restriction de son ensemble de définition.

Définissons à présent la convergence dans  $D_\infty$ .

On définit la convergence de  $f_n$  vers  $f$  dans  $D_\infty$  en demandant la convergence  $d_t^o(f_n, f) \xrightarrow[n]{} 0$  et en considérant les restrictions de  $f_n$  et  $f$  à  $[0, t]$  pour tout  $t > 0$ .

**Lemme 1.17**

Soient  $f_n, f \in D_u$ .

Si  $d_u^o(f_n, f) \xrightarrow[n]{} 0$  et si pour  $m < u$ ,  $f$  est continue en  $m$  alors  $d_m^o(f_n, f) \xrightarrow[n]{} 0$ .

La métrique sur  $D_\infty$  va être définie par les métriques  $d_m^o$  pour  $m \in \mathbb{N}^*$ .

On va définir, pour  $f \in D_\infty$ ,  $f^m$  qui est la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, m]$ , continue en  $m$  et qui est un élément de  $D_\infty$ .

Pour cela, on va noter

$$g_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq m-1 \\ m-t & \text{si } m-1 \leq t \leq m \\ 0 & \text{si } t \geq m. \end{cases}$$

On pose alors  $f^m(t) := g_m(t)f(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

Cela nous permet de définir une métrique sur  $D_\infty$ .



**Proposition 1.18 :** Métrique sur  $D_\infty$ .

Pour tout  $f, g \in D_\infty$ ,

$$d_\infty^o(f, g) := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} (1 \wedge d_m^o(f^m, g^m))$$

définie une métrique sur  $D_\infty$ .

**Remarque 1.19**

Comme sur  $D_{[0,1]}$ , si on remplace  $d_m^o$  par  $d_m$  dans la formule ci-dessus, on définit une autre métrique  $d_\infty$  équivalente à  $d_\infty^o$ .

**Théorème 1.20**

On a équivalence entre les énoncés suivants :

1.  $d_\infty^o(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  dans  $D_\infty$  ;
2. Il existe  $\lambda_n \in \Lambda_\infty$  tel que
  - a)  $\sup_{t < \infty} |\lambda_n(t) - t| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
  - b)  $\forall m > 0, \sup_{t \leq m} |f_n(\lambda_n(t)) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Remarque 1.21**

Dans le théorème, on peut remplacer la condition 2.a) par  $\|\lambda_n\|^o \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Proposition 1.22 :** Mesurabilité des projections.

Pour tout  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k < \infty$ , on définit la projection de  $D_\infty$  dans  $\mathbb{R}^k$  par

$$\pi_{t_1 \dots t_k}(x) = (x(t_1), \dots, x(t_k)) \quad \forall x \in D_\infty.$$

Alors pour tout  $t \geq 0$ ,  $\pi_t$  est mesurable par rapport à la tribu borelienne notée  $\mathcal{B}(D_\infty)$ .

**Théorème 1.23 :** Egalité de tribus

La tribu borelienne  $\mathcal{B}(D_\infty)$  est engendrée par les projections  $(\pi_t)_{t \geq 0}$  :

$$\mathcal{B}(D_\infty) = \sigma(\pi_t \mid t \geq 0).$$

Dans toute la suite du rapport, les métriques de Skorohod définies ci-dessus seront toutes notées  $d_s$  car il n'y aura pas d'ambiguïté sur la métrique à utiliser.

## 2 Chaîne de Markov en temps continu.

Cette section s'inspire essentiellement du cours [4] et du livre [2].

### 2.1 Construction et définition d'une chaîne de Markov en temps continu.

Dans notre étude, nous allons construire puis définir le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , indexé par le temps  $t \in \mathbb{R}^+$ . Soit  $E$  un ensemble fini ou dénombrable.

#### Approche heuristique

Comme  $E$  est dénombrable, la chaîne doit évoluer "en sauts" c'est-à-dire pas de manière continue. L'évolution de la chaîne de Markov va être définie de la manière suivante : après une durée aléatoire passée dans un état  $x$ , la chaîne va sauter aléatoirement sur un autre état  $y$  de  $E$ . On répète alors ce processus pour chaque état visité.

A partir d'un état initial, le processus doit satisfaire deux propriétés :

1. La propriété de Markov impose que la loi de probabilité que suit le temps de séjour dans chaque état ne doit dépendre que de l'état  $x$  dans laquelle la chaîne se trouve. Elle ne doit pas dépendre du temps déjà passé en  $x$ . La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle impose que le temps d'attente dans un état  $x$  suit la loi exponentielle de paramètre noté  $\lambda(x)$ . Ce paramètre s'interprète comme le taux de saut à partir de l'état  $x$ .
2. Lors d'un saut, la propriété de Markov impose que le choix du prochain état ne dépende que de l'état actuel  $x$ . Ainsi, les sauts sont décrits, comme pour les chaînes de Markov en temps discret, par une matrice stochastique  $A = (a(x, y))_{x, y \in E}$  où  $a(x, y)$  est la probabilité de passer de l'état  $x$  à l'état  $y$ .

Cette approche heuristique suggère que la construction d'une chaîne de Markov en temps continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  de paramètre  $(\lambda(x))_{x \in E}$  et  $A = (a(x, y))_{x, y \in E}$  repose sur une chaîne de Markov à temps discret  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrice de transition  $A$  dont il va falloir ajuster les temps d'attente dans chaque état pour qu'ils suivent une loi exponentielle.

#### Construction en temps continu

Soit  $x \in E$  un état initial. Soit  $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{P}_1^x)$  un espace de probabilité sur lequel est défini une chaîne de Markov à temps discret  $Y_n$  de matrice de transition  $A = (a(x, y))_{x, y \in E}$  et d'état initial  $x \in E$ . Soit  $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{P}_2)$  un espace de probabilité sur lequel est défini  $(\Theta_j)_{0 \leq j < \infty}$ , une suite de variable aléatoire de loi exponentielle i.i.d. d'espérance 1 et indépendante de la suite  $(Y_n)_n$ . On suppose qu'il existe une constante  $\lambda_0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\lambda(x) \leq \lambda_0$ . On note  $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P}^x)$  l'espace produit de probabilité sur lequel on va définir la chaîne de Markov en temps continu  $(X_t)_t$  :

$$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P}^x) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \mathbb{P}_1^x \otimes \mathbb{P}_2).$$

Les états visités par la chaîne de Markov en temps continu  $X_t$  est donnés par la suite  $Y_0, Y_1, \dots$ .

On définit alors les temps d'attentes de chaque état par  $\sigma_n = \lambda(Y_n)^{-1} \Theta_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Y_n$  étant donné, la variable aléatoire  $\sigma_n$  est indépendante de  $(\sigma_k, Y_k)_{0 \leq k \leq n-1}$  et suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda(Y_n)$ .

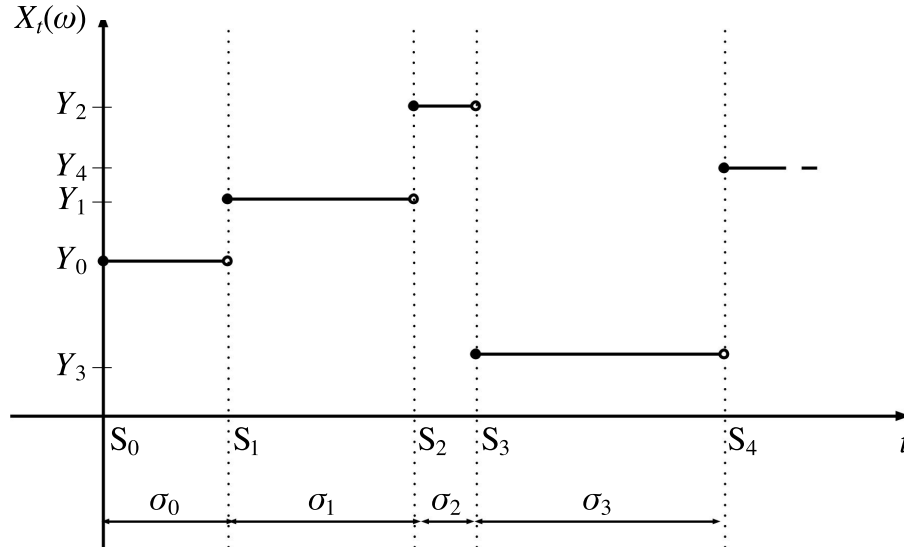
On définit alors  $T_0 = 0$  et  $T_n = \sigma_0 + \dots + \sigma_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ . On pose alors :

$$X_t = Y_n \text{ pour } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit,  $X_t$  reste pendant le temps  $\sigma_n$  à l'état  $Y_n$  puis saute à l'état  $Y_{n+1}$ .

$X_t$  est bien défini pour tout  $0 \leq t < \infty$  (car  $\lambda(x) \leq \lambda_0$  pour tout  $x \in E$ , voire les conditions de non-explosion d'une chaîne de Markov en temps continu 2.11) et la construction peut être répétée pour tout état initial  $x \in E$ .

Graphiquement,



### Remarque 2.1

Par construction, on a que la trajectoire  $t \mapsto X_t$  est une application continue à droite.

### Définition 2.2 : Processus de sauts

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

On dit que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de sauts d'espace d'états  $E$  et d'instant de sauts  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique dont les valeurs ne peuvent changer qu'en ses instants de sauts :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists! x \in E \quad \forall t \in [S_n, S_{n+1}[, \quad X_t = x.$$

### Définition 2.3 : Processus de sauts markovien ou chaîne de Markov en temps continu

Un processus de sauts  $(X_t)_{t \geq 0}$  d'espace d'états  $E$  et d'instant de sauts  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est markovien s'il existe :

1. une suite bornée  $(\lambda(x))_{x \in E}$  de réels strictement positifs ;
2. une matrice  $A = (a(x, y))_{x, y \in E}$  de réels positifs vérifiant

$$\forall x \in E, \quad a(x, x) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{y \in E} a(x, y) = 1$$

tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in E, \quad \forall t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \geq 0,$$

$$\mathbb{P}(X_{S_{n+1}} = x_{n+1}, S_{n+1} - S_n > t_{n+1} \mid X_{S_n} = x_n, S_n - S_{n-1} > t_n, \dots, X_{S_1} = x_1, S_1 - S_0 > t_1, X_{S_0} = x_0)$$

$$= \mathbb{P}(X_{S_{n+1}} = x_{n+1}, S_{n+1} - S_n > t_{n+1} \mid X_{S_n} = x_n) \quad (1)$$

$$= e^{-\lambda(x_n)t_{n+1}} a(x_n, x_{n+1}) \quad (2)$$

**Remarque 2.4 :** *Bilan de la construction et de la définition.*

1. Le temps de séjour dans l'état  $x$  est donné par  $\sigma_n = S_{n+1} - S_n \sim \mathcal{E}(\lambda(x))$ . Ainsi, le temps de séjour dépend, à priori, de l'état, de la position  $x$  mais est indépendant du passé du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ .
2. A l'instant  $S_{n+1}$ , le processus saute de l'état  $x$  vers l'état  $y$  (avec  $x \neq y$ ) avec probabilité  $a(x, y)$  qui est indépendante de  $S_{n+1} - S_n$  et du passé.
3. (1) traduit la caractéristique markovien du processus : "conditionnellement à l'état présent, le futur ne dépend pas du passé".
4. Dans (2), le terme  $e^{-\lambda(x_n)t_{n+1}}$  correspond à la probabilité pour un temps de séjour de loi exponentielle de paramètre  $\lambda(x_n)$  d'être supérieur à  $t_{n+1}$  car

$$\mathbb{P}(S_{n+1} - S_n > t_{n+1}) = e^{-\lambda(x_n)t_{n+1}}.$$

Le produit de  $e^{-\lambda(x_n)t_{n+1}}$  et  $a(x_n, x_{n+1})$  traduit l'indépendance entre le temps de séjour et le futur état visité.

5.  $\lambda(x)$  est appelé *taux de saut* à partir de l'état  $x$ .  
 $\frac{1}{\lambda(x)}$  est le temps moyen passé dans l'état  $x$  avant le prochain saut.
6. La variable aléatoire  $X_t$  est bien définie pour tout  $t \geq 0$  car la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend presque sûrement vers l'infini (la suite  $(\lambda(x))_{x \in E}$  étant bornée).

## 2.2 Générateur de Markov.

### 2.2.1 Définitions

**Proposition 2.5 :** *Propriété de Markov*

Un processus de Markov en temps continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  à espace d'états  $E$  satisfait les 2 égalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_0, \dots, x_n, x_{n+1} \in E, \quad \forall 0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1, X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}-t_n} = x_{n+1} \mid X_0 = x_n) \end{aligned}$$

*Démonstration.*

Nous allons donner les idées principales de cette démonstration qui repose essentiellement sur la propriété de Markov en temps discret et sur la propriété "sans mémoire" des lois exponentielles.

L'état passé du processus  $(X_t)$  avant l'instant  $t$  est donné par le nombre de sauts avant  $t$ , disons  $n$ , ses états successifs, disons  $x_0, \dots, x_n$  et les temps d'attente dans chacun de ces états. L'état présent du processus est donné par  $X_t = x_n$ . L'état futur est donné par l'évolution de la chaîne de Markov en temps discret (1.6)  $(Y_k)_{k \geq n}$  issue de  $x_n$  et par les temps d'attente dans chacun de ces états. D'après la propriété de Markov pour la chaîne en temps discret, l'évolution de  $(Y_n)$  sachant son état passé ne dépend que de  $x_n$ . Les temps d'attente des états  $x_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots$  sont donnés par les v.a.  $T, X_{n+2}, X_{n+3}, \dots$ , où  $T := X_{n+1} - (t - S_n)$ . Il reste alors à montrer que  $T$  conditionnellement aux états passés, aux temps d'attente passés et à  $S_n \leq t$  et  $X_{n+1} > (t - S_n)$  (qui permet d'assurer qu'il y'a eu exactement  $n$  sauts avant  $t$ ) suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda(x_n)$ . On utilise pour cela les propriétés des lois exponentielles (1.7).  $\square$

On définit la *probabilité de transition* de l'état  $x$  vers  $y$  sur un intervalle de temps de longueur  $t$  par  $p_t(x, y) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x)$ .

On note alors  $P_t = (p_t(x, y))_{x, y \in E}$  la matrice de transition sur un intervalle de temps de longueur  $t$ .

### Remarque 2.6

1. Comme dans le cas discret :

(a)  $P_t$  est une matrice stochastique ;

(b) la loi  $\mu_t$  de la v.a.  $X_t$  est obtenue par le produit matriciel entre la loi initiale  $\mu_0$  et la matrice de transition  $P_t$  :

$$\mu_t = \mu_0 P_t.$$

2. Comme l'application  $t \mapsto X_t$  est continue à droite, on a aussi que la probabilité de transition  $p_t(x, y)$  est continue à droite en temps que fonction du temps pour tout  $x, y \in E$ . Donc la limite

$$\begin{aligned} p_0(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} p_t(x, y) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases} \end{aligned}$$

est bien définie.

### Proposition 2.7 : Relation de Chapman-Kolmogorov

Soit  $(X_t)_t$  un processus de Markov en temps continu de matrice de transition  $(P_t)_{t \geq 0}$ . Soit  $s, t \geq 0$ . Alors on a :

$$P_{t+s} = P_t P_s.$$

Autrement dit, pour tout  $x, y \in E$  :

$$p_{t+s}(x, y) = \sum_{z \in E} p_t(x, z) p_s(z, y)$$

*Démonstration.*

Soient  $s, t \geq 0$  et  $x, y \in E$ .

$$\begin{aligned} p_{s+t}(x, y) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y, X_t = z \mid X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_t = z, X_0 = x) \mathbb{P}(X_t = z \mid X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = y \mid X_t = z) \mathbb{P}(X_t = z \mid X_0 = x) \text{ d'après la propriété de Markov} \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_s = y \mid X_0 = z) \mathbb{P}(X_t = z \mid X_0 = x) \text{ par homogénéité} \\ &= \sum_{z \in E} p_s(z, y) p_t(x, z) \end{aligned}$$

□

### Théorème 2.8

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov en temps continu associé à la suite  $(\lambda(x))_{x \in E}$  et à la matrice  $A = (a(x, y))_{x, y \in E}$ . Soient  $x, y \in E$ . L'application  $t \mapsto p_t(x, y)$  est dérivable à droite en  $t = 0$  et cette dérivée vaut :

$$q(x, y) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_t(x, y) - p_0(x, y)}{t} = \begin{cases} \lambda(x) a(x, y) & \text{si } x \neq y \\ -\lambda(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Lorsque les états  $x$  et  $y$  sont distincts, cette dérivée est appelée *taux de transition de  $x$  vers  $y$* . La matrice  $Q = (q(x, y))_{x, y \in E}$  est appelée *générateur de Markov* du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

*Démonstration.*

Nous ne traiterons que le cas  $x = y$ . Le cas  $x \neq y$  se traite de façon similaire.

Supposons que  $x = y$ .

On suppose qu'à l'instant initial  $t = 0$  et au temps  $t$ , la chaîne se trouve dans l'état  $x$ . Alors soit le processus n'a pas quitté l'état  $x$ , ce qui signifie que le premier temps de saut  $T_1$  survient après  $t$ ; soit le processus a quitté l'état  $x$  et y est revenu, ce qui implique au moins deux sauts avant l'instant  $t$ . On a donc :

$$\mathbb{P}(X_t = x \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(T_1 > t \mid X_0 = x) + \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 \leq t, X_t = x \mid X_0 = x).$$

Sachant que  $X_0 = x$ , l'instant du premier saut  $T_1$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda(x)$ . On a alors :

$$\mathbb{P}(T_1 > t \mid X_0 = x) = e^{-\lambda(x)t}.$$

Lorsque  $t$  tend vers 0, on a donc :

$$\mathbb{P}(T_1 > t \mid X_0 = x) = 1 - \lambda(x)t + o(t).$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 \leq t, X_t = x \mid X_0 = x) &\leq \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 \leq t \mid X_0 = x) \\ &\leq \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 - T_1 \leq t \mid X_0 = x) \\ &\leq \sum_{z \in E} \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 - T_1 \leq t, X_{T_1} = z \mid X_0 = x) \end{aligned}$$

Soit  $z \in E$ . Par définition d'une chaîne de Markov en temps continu, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 - T_1 \leq t, X_{T_1} = z \mid X_0 = x) &= \mathbb{P}(X_{T_1} = z, T_2 - T_1 \leq t, \mid T_1 \leq t, X_0 = x) \times \mathbb{P}(T_1 \leq t \mid X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(X_{T_1} = z, T_2 - T_1 \leq t, \mid T_1 \leq t, X_0 = x) \times (1 - e^{-\lambda(x)t}) \\ &= (1 - e^{-\lambda(z)t}) a(x, z) (1 - e^{-\lambda(x)t}) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de convexité  $e^{-u} \geq 1 - u$  et le fait que la suite  $(\lambda(x))_{x \in E}$  soit bornée par une constante  $\lambda_0$ , on a, quand  $t$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 \leq t, X_t = x \mid X_0 = x) &\leq \sum_{z \in E} \mathbb{P}(T_1 < t, T_2 - T_1 \leq t, X_{T_1} = z \mid X_0 = x) \\ &\leq \sum_{z \in E} (1 - e^{-\lambda(z)t}) a(x, z) (1 - e^{-\lambda(x)t}) \\ &\leq \sum_{z \in E} \lambda(z) a(x, z) \lambda(x) t^2 \\ &\leq \lambda_0 \lambda(x) t^2 \sum_{z \in E} a(x, z) \\ &\leq \lambda_0 \lambda(x) t^2 \\ &= o(t) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien la limite recherchée,

$$\frac{\mathbb{P}(X_t = x \mid X_0 = x) - 1}{t} = -\lambda(x) + o(1).$$

□

**Définition 2.9 :** *Générateur de Markov*

Un générateur de Markov sur un espace dénombrable  $E$  est une matrice  $Q = (q(i, j))_{i, j \in E}$  qui satisfait les conditions suivantes :

1.  $0 \leq -q(i, i) < \infty$  pour tout  $i \in E$ ;
2.  $q(i, j) \geq 0$  pour tout  $i \neq j$ ;
3.  $\sum_{j \in E} q(i, j) = 0$  pour tout  $i \in E$ .

**Remarque 2.10**

1. Le générateur de Markov  $Q$  est entièrement déterminé par la suite  $(\lambda(x))_{x \in E}$  et la matrice  $A$ . C'est une matrice à coefficients réels positifs sauf sur la diagonale :

$$q(x, x) = -\lambda(x) = -\lambda(x) \sum_{y \in E, y \neq x} a(x, y) = - \sum_{y \in E, y \neq x} q(x, y).$$

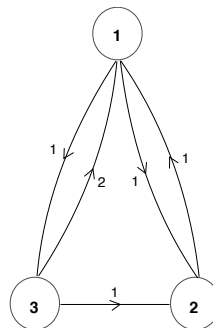
La somme des coefficients d'une ligne de  $A$  vaut donc 0.

2. Les termes  $q(i, j)$  pour  $i \neq j$ , s'interprètent comme les *taux de sauts* de l'état  $i$  à l'état  $j$ . Les termes diagonaux  $q(i, i)$  s'interprètent comme le *taux de quitter l'état  $i$* .
3. L'intérêt du générateur de Markov est qu'il ne dépend pas du temps contrairement aux matrices de transitions.
4. On peut résumer l'information du générateur par un *graphe de transition*. C'est un graphe orienté et pondéré dont l'ensemble des sommets est  $E$ .

**Exemple :** Le graphe de transition associé à la matrice génératrice

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

est :

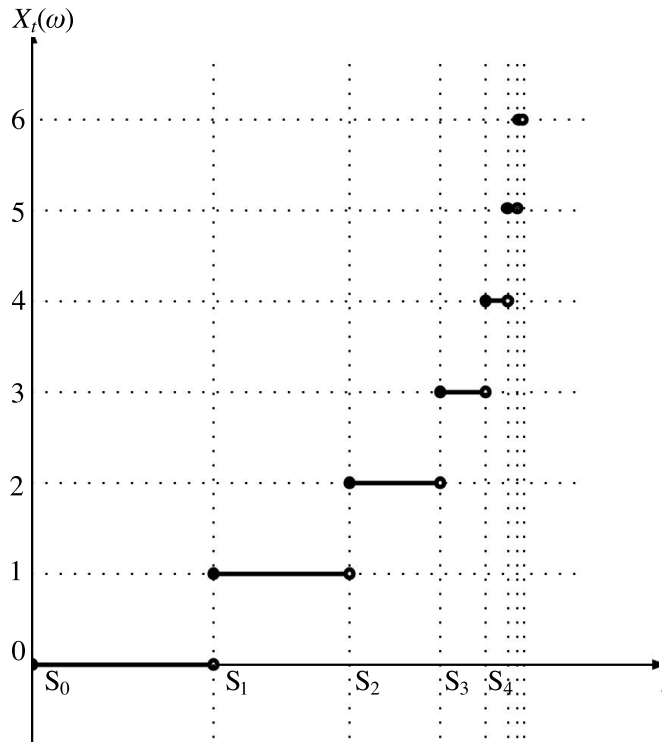


Si chaque temps passé dans un état est strictement positif, on peut avoir une suite d'états avec des temps d'attente de plus en plus courts et ainsi avoir une infinité de sauts en un temps fini, c'est-à-dire que la suite  $(S_n)_n$  ne tend pas vers  $+\infty$  p.s. quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ce phénomène est appelé explosion. Ainsi, pour un processus dont les temps de saut sont donnés par  $S_0, S_1, \dots$  et les temps d'attente par  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , le temps d'explosion  $\zeta$  est défini par

$$\zeta = \sup_n S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n.$$

On dit alors qu'il y'a explosion si et seulement si  $\zeta < \infty$ .

Exemple d'un phénomène d'explosion :



**Lemme 2.11 :** *Condition de non-explosion d'une chaîne de Markov en temps continu.*

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov de paramètre  $\lambda$  et de générateur  $Q$ . Alors  $(X_t)_{t \geq 0}$  n'explose pas si

$$\sup_{i \in E} q(i, i) < \infty.$$

*Démonstration.*

On pose  $\Theta_n := q(Y_{n-1}, Y_{n-1})\sigma_n$ .

Alors  $\Theta_1, \Theta_2, \dots$  sont des v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1 et indépendantes de la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  (d'après 2.1).

Comme  $q := \sup_i q(i, i) < \infty$ , on a

$$q\zeta \geq \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n = \infty \quad \text{p.s. d'après la loi des grands nombres.}$$

Cette égalité montre que le processus  $(X_t)_t$  n'explose pas p.s. □



## 2.2.2 Générateur de Markov, matrice de transitions et matrice de sauts

### **Théorème 2.12 :** *Equations de Kolmogorov*

On considère un processus markovien de sauts de probabilités de transition  $(P_t)_{t \geq 0}$  et de générateur  $Q$ . On a la relation :

$$(P_t)' = P_t Q = Q P_t$$

où  $(P_t)'$  désigne la dérivée de  $P_t$  au point  $t$  si  $t > 0$  et la dérivée à droite si  $t = 0$  :

$$(p_t)'(x, y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p_{t+s}(x, y) - p_t(x, y)}{s}.$$

*Démonstration.*

Nous ne traiterons la démonstration que dans le cas où  $E$  est fini.

La relation de Chapman-Kolmogorov s'écrit :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad p_{t+s}(x, y) = \sum_{z \in E} p_t(x, z) p_s(z, y).$$

On dérive cette formule par rapport à  $s$  :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{t+s+h}(x, y) - p_{s+h}(x, y)}{h} = \sum_{z \in E} p_t(x, z) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{s+h}(z, y) - p_s(z, y)}{h} \right).$$

On calcule cette expression en  $s = 0$  ;

pour tout  $x, y \in E$  :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{t+h}(x, y) - p_t(x, y)}{h} &= \sum_{z \in E} p_t(x, z) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_h(z, y) - p_0(z, y)}{h} \right) \\ (p_t)'(x, y) &= \sum_{z \in E} p_t(x, z) q(z, y) \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$(P_t)' = P_t Q.$$

La seconde égalité s'obtient en dérivant par rapport à  $t$  et en faisant  $t = 0$ . □

### **Remarque 2.13**

Si on connaît le générateur d'un processus de Markov, on peut trouver les probabilités de transition comme solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. En particulier, si  $E$  est fini, on a

$$P_t = e^{tA} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

**Exemple :**

Si on considère le générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

alors on peut calculer la matrice de transitions  $P_t$ .

Par exemple, en calculant l'exponentielle de la matrice  $Q$  et en utilisant les équations de Kolmogorov (2.12), on obtient :

$$p_t(1,1) = \frac{3}{8} + \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{3e^{-4t}}{8}.$$

**Remarque 2.14 :** *Générateur de Markov et matrice de sauts*

Dans cette remarque, nous allons présenter une procédure pour obtenir une matrice stochastique à partir d'un générateur de Markov. Plus précisément, la matrice stochastique obtenue correspond à la matrice de transition  $P$  de la chaîne de Markov à temps discret  $(Y_n)_{n \geq 0}$  qui intervient dans la construction d'un processus de sauts markoviens.

Soit  $Q$  un générateur de Markov, on définit  $P = (p(i,j))_{i,j \in I}$ , la *matrice de sauts* par :

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{q(i,j)}{-q(i,i)} & \text{si } j \neq i \text{ et } q(i,i) \neq 0 \\ 0 & \text{si } j \neq i \text{ et } q(i,i) = 0 \end{cases}$$

$$p(i,i) = \begin{cases} 0 & \text{si } q(i,i) \neq 0 \\ 1 & \text{si } q(i,i) = 0. \end{cases}$$

**Exemple :**

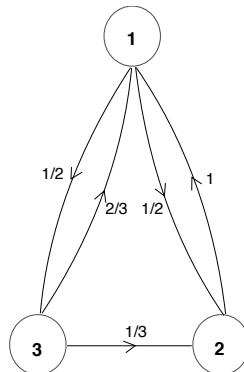
Si on considère le générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

alors on peut calculer sa matrice de sauts  $P$  :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire le diagramme de sauts :



**2.2.3 Construction alternative d'une chaîne de Markov en temps continu**

Dans ce paragraphe, nous allons proposer une autre construction d'une chaîne de Markov en temps continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  à partir de la donnée d'un générateur de Markov  $Q$ .

On pose  $X_0 := Y_0$ , l'état initial du processus où  $Y_0$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et avec une famille de variables aléatoires  $(\Theta_n^j)_{n \geq 1, j \in E}$  indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

On va construire par récurrence sur  $n$  la chaîne de Markov en temps continu.

Si  $Y_n = i$ , on pose :

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^j &= \frac{\Theta_{n+1}^j}{q(i, j)}, \quad \text{pour } j \neq i, \\ \sigma_{n+1} &= \inf_{j \neq i} \sigma_{n+1}^j, \\ Y_{n+1} &= \begin{cases} j & \text{si } \sigma_{n+1}^j = \sigma_{n+1} < \infty \\ i & \text{si } \sigma_{n+1} = \infty \end{cases}\end{aligned}$$

Alors, conditionnellement à  $Y_n = i$ , les variables aléatoires  $\sigma_{n+1}^j$  sont indépendantes et suivent des lois exponentielles de paramètre  $q(i, j)$  pour tout  $j \neq i$ .

Donc, conditionnellement à  $Y_n = i$ , d'après 1.8,  $\sigma_{n+1}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $q(i, i) = \sum_{j \neq i} q(i, j)$ ,  $Y_{n+1}$  a la même loi que  $(p(i, j))_{j \in E}$ , et  $\sigma_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  sont indépendantes, et indépendantes de la suite  $Y_0, \dots, Y_n$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , comme voulue.

### Remarque 2.15

Cette construction justifie l'appellation des termes  $q(i, j)$  pour  $i \neq j$  (*taux de sauts* de l'état  $i$  à l'état  $j$ ) et des termes diagonaux  $q(i, i)$  (*taux de quitter l'état  $i$* ).

## 2.3 Définitions générales des processus markoviens.

Soit  $Y$  un espace métrique.

On note  $D_Y$  l'espace des trajectoires possibles pour le processus, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues à droite et avec des limites à gauche en tout point de  $[0, +\infty[$  dans  $Y$  :

$$D_Y = \{\omega : [0, +\infty[ \rightarrow Y \mid \omega(t) = \lim_{s \searrow t} \omega(s) \text{ et la limite } \omega(t^-) := \lim_{s \nearrow t} \omega(s) \text{ existe}\}.$$

On appellera les éléments de  $D_Y$  des trajectoires *cadlag*.

On munit  $Y$  de la tribu borélienne associée. On munit  $D_Y$  de la tribu  $\mathcal{F}$  engendrée par les applications  $\omega \mapsto \omega(t)$  pour tout  $t \geq 0$  :

$$\mathcal{F} = \sigma(\omega(t) \mid \omega \mapsto \omega(t), t \geq 0).$$

Sur l'espace de fonctions  $D_Y$ , on note  $X_\cdot = (X_t \mid t \geq 0)$ , l'ensemble des trajectoires définies par  $X_t(\omega) = \omega(t)$  de loi  $\mathbb{P}^x$ , et  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\}$  la tribu engendrée par les trajectoires jusqu'au temps  $t$ . On note que  $\mathbb{P}^x$  est une mesure de probabilité sur  $(D_Y, \mathcal{F})$ .

On introduit également l'opérateur de translation  $\Theta_t : D_Y \rightarrow D_Y$  définie par  $\Theta_t(\omega(s)) = \omega(s+t)$ .

Pour un événement  $A \in \mathcal{F}$ , l'image inverse

$$\Theta_t^{-1}(A) = \{\omega \in D_Y \mid \Theta_t(\omega) \in A\}$$

correspond à l'évènement " $A$  se réalise à partir du temps  $t$ ".

Remarque : On a vu, (d'après 1.23), que la tribu  $\mathcal{F}$  est égale à la tribu borelienne  $\mathcal{B}(D_Y)$ .

**Définition 2.16 : Processus de Markov**

Un processus de Markov est une famille  $\{\mathbb{P}^x \mid x \in Y\}$  de mesures de probabilité sur  $D_Y$  qui possèdent les propriétés suivantes :

1.  $\mathbb{P}^x\{\omega \in D_Y \mid \omega(0) = x\} = 1$ ,
2. Pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , la fonction  $x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$  est mesurable sur  $Y$ ,
3.  $\mathbb{P}^x[\Theta_t^{-1}(A) \mid \mathcal{F}_t](\omega) = \mathbb{P}^{\omega(t)}(A)$  pour  $\mathbb{P}^x$ -presque tout  $\omega$ , pour tout  $x \in Y$  et pour tout  $A \in \mathcal{F}$ .

**Remarque 2.17**

Dans la définition précédente, la propriété 1. signifie que  $x$  est l'état initial du processus sous la mesure  $\mathbb{P}^x$  ; la propriété 2. répond à des contraintes de mesurabilité et 3. est la propriété de Markov.

**Définition 2.18 : Autres définitions**

1. Pour commencer un processus à partir d'une loi initiale  $\mu$  différente d'une masse de Dirac  $\delta(x)$ , on définit sur  $D_Y$ , la mesure  $\mathbb{P}^\mu$  par :

$$\mathbb{P}^\mu(A) = \int_Y \mathbb{P}^x(A) \mu(dx) \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}$$

2. La *probabilité de transition*  $p_t(x, dy)$  est défini pour tout  $t \geq 0, x \in Y$  et tout borélien  $B \subseteq Y$  par

$$p_t(x, B) = \mathbb{P}^x\{X_t \in B\}$$

**Proposition 2.19 : Équation de Chapman-Kolmogorov**

Soient  $s, t \geq 0, x \in Y$  et  $B \subseteq Y$  un borélien. Alors on a :

$$p_{s+t}(x, B) = \int_Y p_s(y, B) p_t(x, dy)$$

*Démonstration.*

Soient  $s, t \geq 0, x \in Y$  et  $B \subseteq Y$  un borélien.

$$\begin{aligned} p_{s+t}(x, B) &= \mathbb{P}(X_{s+t} \in B \mid X_0 = x) \\ &= \int_Y \mathbb{P}(X_{s+t} \in B, X_t \in dy \mid X_0 = x) \\ &= \int_Y \mathbb{P}(X_{s+t} \in B \mid X_t \in dy, X_0 = x) \mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_0 = x) \\ &= \int_Y \mathbb{P}(X_{s+t} \in B \mid X_t \in dy) \mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_0 = x) \text{ d'après la propriété de Markov} \\ &= \int_Y \mathbb{P}(X_s \in B \mid X_0 \in dy) \mathbb{P}(X_t \in dy \mid X_0 = x) \text{ par homogénéité} \\ &= \int_Y p_s(y, B) p_t(x, dy) \end{aligned}$$

□

### 3 Processus de Poisson.

Cette section s'inspire essentiellement du cours [4] et du livre [2].

#### 3.1 Définitions et constructions du processus de Poisson.

**Définition 3.1 :** *Processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$*

Un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda \in ]0, +\infty[$  est une chaîne de Markov en temps continu  $N_t$  sur l'espace d'états  $\mathbb{N}$  et de générateur  $Q$  définie par  $q(j, j+1) = \lambda$  et  $q(j, j) = -\lambda$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

#### Construction du processus de Poisson $N_t$ .

Cette construction s'appuie sur les mêmes idées que celle de la chaîne de Markov en temps continu. Soit  $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires discrètes et déterministes définie par  $Y_j = j$  pour tout  $j \geq 0$ . On introduit aussi une suite  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . On pose

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= X_1 + \dots + X_n \text{ pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

On définit alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$N_t = n \text{ pour } S_n \leq t < S_{n+1}.$$

On a construit une chaîne de Markov en temps continu de paramètre  $\lambda$  et de matrice de saut  $P = (p(i, j))_{i, j \in \mathbb{N}}$  définie par  $p(i, i+1) = 1$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le processus  $(Y_j)_j$  étant déterministe. A partir de cette matrice de sauts, on en déduit, d'après 2.8 que le générateur de Markov est la matrice  $Q$  définie ci-dessus.

#### Remarque 3.2

L'intensité du processus de Poisson s'interprète comme le nombre moyen d'évènements qui se produisent pendant un intervalle de temps de longueur unité c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[N_{t+1} - N_t] = \lambda.$$

#### Remarque 3.3 : Définition équivalente du processus de Poisson

La construction précédente donne, pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} N_t &= \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{1}_{[S_n, S_{n+1}[}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{[S_n, S_{n+1}[}(t) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \mathbf{1}_{[S_n, S_{n+1}[}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[S_j, +\infty[}(t) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{]0, t]}(S_j). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité suggère un point de vue différent pour définir un processus de Poisson. On peut ainsi considérer l'ensemble  $\{S_j\}_{j \in J}$  où  $J$  est une partie de  $\mathbb{N}$ , comme un ensemble de points aléatoires sur  $]0, +\infty[$  et définir  $N_t$  comme le nombre de ses points sur l'intervalle  $]0, T]$ .

On peut généraliser la remarque ci-dessus en définissant une *mesure de comptage aléatoire*  $N(\cdot)$  par

$$N(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_B(S_j) \quad \text{pour tout borélien } B \subseteq ]0, \infty[.$$

La construction précédente  $N_t = N(]0, t])$  est alors le cas particulier où  $B = ]0, t]$ .

### Autre construction du processus de Poisson $N_t$ .

La remarque ci-dessus donne une construction différente du processus de Poisson.

Soit  $]0, +\infty[ = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ , la décomposition de  $]0, \infty[$  en unions d'intervalles bornées deux à deux disjointes. Pour tout  $i$ , on définit  $(t_k^i)_{1 \leq k < \infty}$  une suite de variables aléatoires, uniformément distribuées dans l'intervalle  $U_i$  et tel que toutes les variables aléatoires  $(t_k^i)_{1 \leq i, k < \infty}$  soient indépendantes. Soit  $\{K_i\}_i$ , un ensemble de variables aléatoires indépendantes et indépendantes des  $(t_k^i)_{1 \leq i, k < \infty}$ , de loi de Poisson de paramètre  $\lambda |U_i|$  où  $|\cdot|$  est la mesure de Lebesgue. L'ensemble de points qui définit le processus de Poisson est l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{t_k^i \mid i = 1, 2, \dots, 1 \leq k \leq K_i\}$$

ou la fonction de comptage

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K_i} \mathbb{1}_{]0, t]}(t_k^i).$$

#### Proposition 3.4

Les deux constructions du processus de Poisson sont équivalentes.

*Démonstration.*

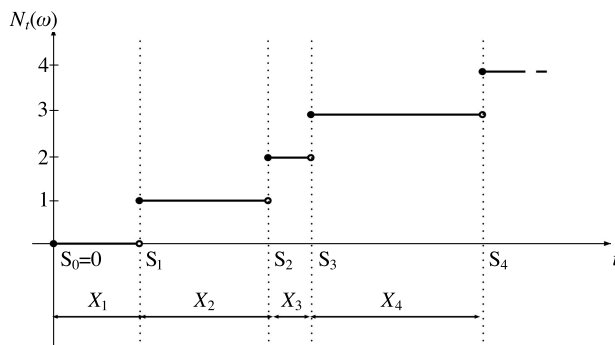
Admis. □

#### Remarque 3.5 : Bilan sur les différents points de vue pour un processus de Poisson

On pourra désormais alterner parmi ces 3 points de vue d'un processus de Poisson sur  $]0, +\infty[$  :

1. Une suite ordonnée d'instants de sauts séparée par des durées aléatoires :  $0 < S_1 < S_2 < \dots$
2. Un ensemble aléatoire :  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$  ;
3. Une fonction de comptage :  $N_t = \text{Card}(\mathcal{T} \cap ]0, t])$ .

Représentation graphique :



### 3.2 Propriétés du processus de Poisson.

#### Lemme 3.6

La loi des  $n$  premiers instants de saut  $(S_1, \dots, S_n)$  est donnée par la densité  $f_n(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n}$ .

*Démonstration.*

On sait que les variables aléatoires  $X_i = S_i - S_{i-1}$  sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . On va déterminer la loi de  $(S_1, \dots, S_n)$  à l'aide de celle de  $(X_1, \dots, X_n)$  par le changement de variables  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n)$  défini par  $t_k = x_1 + \dots + x_k$  où  $x_k = t_k - t_{k-1}$  pour tout  $k \in [1, n]$ . On a bien un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $D = \{0 < t_1 < \dots < t_n\}$  dans  $\Delta = (\mathbb{R}_+^*)^n$  dont le jacobien vaut 1 (c'est un système linéaire triangulaire).

Alors pour toute fonction borélienne intégrable  $h$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(S_1, \dots, S_n)] &= \mathbb{E}[h(X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + \dots + X_n)] \\ &= \int_{\Delta} h(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n) \prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda x_k} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_D h(t_1, \dots, t_n) \lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_D h(t_1, \dots, t_n) \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n} dt_1 \dots dt_n dt_1 \dots dt_n, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

#### Proposition 3.7

Conditionnellement à l'évènement  $\{N_t = n\}$ , la loi du vecteur  $(S_1, \dots, S_n)$  des  $n$  premiers instants de saut d'un processus de Poisson est la même que celle du réordonnement par ordre croissant d'une suite de  $n$  v.a. indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, t]$ .

Autrement dit, si on tire des variables aléatoires  $U_1, \dots, U_n$  indépendantes de loi uniforme sur  $[0, t]$  et si on les réordonne en posant

$$Y_1 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i < Y_2 < \dots < Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i,$$

alors la loi conditionnelle de  $(S_1, \dots, S_n)$  sachant  $N_t = n$  est la même que celle de  $(Y_1, \dots, Y_n)$ .

*Démonstration.*

La densité de probabilité du vecteur aléatoire  $(S_1, \dots, S_n)$  étant donné par 3.6, on calcule pour une fonction  $h$  borelienne intégrable :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(S_1, \dots, S_n) \mathbb{1}_{N_t=n}] &= \mathbb{E}[h(S_1, \dots, S_n) \mathbb{1}_{T_n \leq t < T_{n+1}}] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} h(t_1, t_2, \dots, t_n) \mathbb{1}_{t_n \leq t < t_{n+1}} e^{-\lambda t_{n+1}} \lambda^{n+1} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_{n+1}} dt_1 \dots dt_{n+1}. \end{aligned}$$

On intègre par rapport à  $t_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(S_1, \dots, S_n) \mathbb{1}_{N_t=n}] &= \int_{\mathbb{R}_+^n} h(t_1, t_2, \dots, t_n) \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t} dt_1 \dots dt_n \int_t^\infty e^{-\lambda t_{n+1}} \lambda^{n+1} dt_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} h(t_1, t_2, \dots, t_n) \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t} e^{-\lambda t} \lambda^{n+1} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

En divisant cette expression par  $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n}{n!}$ , on obtient l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[h(T_1, \dots, T_n) \mid N_t = n] = \int_{\mathbb{R}^n} h(t_1, t_2, \dots, t_n) \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t} dt_1 \dots dt_n.$$

La densité du vecteur  $(S_1, \dots, S_n)$  conditionnellement à  $N_n = n$  est donc

$$g(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t}.$$

Montrons à présent que  $g$  est aussi la densité du réordonnement de  $n$  points tirés uniformément au hasard sur  $[0, t]$ . La densité du vecteur  $(U_1, \dots, U_n)$  est  $t^{-n}$  sur le pavé  $[0, t]^n$ . On divise ce pavé en  $n!$  secteurs  $(S_k)_{1 \leq k \leq n!}$  correspondant aux permutations des  $(u_i)_i$  et on fait sur chaque secteur le changement de variable  $(u_1, \dots, u_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$  (réordonnement par ordre croissant) dont le jacobien vaut 1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(Y_1, \dots, Y_n)] &= \sum_{1 \leq k \leq n!} \int_{S_k} h(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \frac{1}{t^n} dx_1 \dots dx_n \\ &= n! \int_{0 < y_1 < \dots < y_n} h(y_1, \dots, y_n) \frac{1}{t^n} dy_1 \dots dy_n, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

### Proposition 3.8

Soit  $(N_t)_t$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

Pour tout  $t > 0$ ,  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$  :

$$\forall n > 0, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

*Démonstration.*

Soit  $(N_t)_t$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

On sait que

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

où  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Alors  $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$  pour tout  $n \geq 1$  d'après 1.9.

Par ailleurs, l'évènement  $\{N_t \geq n\}$  est égal à  $\{S_n \leq t\}$  dont on connaît la densité. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t \geq n) &= \mathbb{P}(S_n \leq t) \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx \quad \text{puis par intégration par parties :} \\ &= \frac{\lambda^n t^n e^{-\lambda t}}{n!} + \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) \\ &= \frac{\lambda^n t^n e^{-\lambda t}}{n!} + \mathbb{P}(N_t \geq n+1) \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

□



**Théorème 3.9 : Propriété de Markov**

Soit  $(N_t)_t$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

Pour tout  $s \geq 0$ ,  $(N_{s+t} - N_s)_{t \geq 0}$  est aussi un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et est indépendant de  $(N_r \mid r \leq s)$ .

*Démonstration.*

Soit  $(N_t)_t$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Soit  $s \geq 0$ .

Posons  $\tilde{N}_t = N_{s+t} - N_s$ .

Soit  $i \geq 0$ .

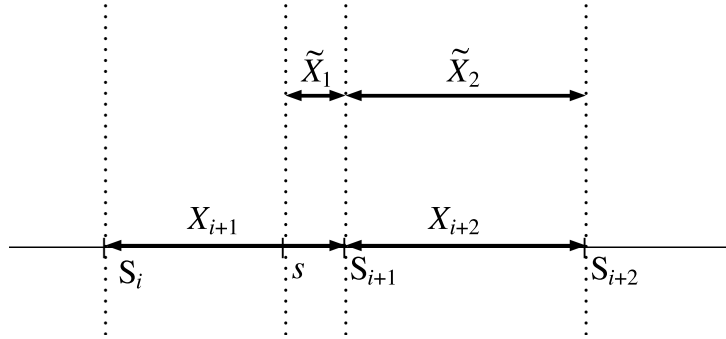
On a :

$$\{N_s = i\} = \{S_i \leq s < S_{i+1}\} = \{S_i \leq s\} \cap \{X_{i+1} > s - S_i\}.$$

On considère les événements  $N_r = \sum_{j=1}^i \mathbf{1}_{N_j \leq r}$  pour  $r \leq s$  et les temps d'attente  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots$  de  $\tilde{N}_t$  définies par

$$\tilde{X}_1 = X_{i+1} - (s - S_i), \quad \tilde{X}_n = X_{i+n} \text{ pour } n \geq 2,$$

et représentés dans le diagramme suivant :



On sait aussi que les temps d'attente  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendants et suivent la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Montrons que  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots$  sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et indépendant de  $X_1, X_2, \dots$

D'après 1.7, on a que  $X_{i+1} - (s - S_i)$  sachant  $\{X_{i+1} > s - S_i\} = \{N_s = i\}$  suit la même loi que  $X_{i+1}$ .

Ainsi, conditionnellement à  $\{N_s = i\}$ ,  $(\tilde{N}_t)_t$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et indépendant de  $(N_r \mid r \leq s)$ .  $\square$

**Proposition 3.10 : Quelques propriétés du processus de Poisson.**

Soit  $(N_t)_t$  un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ .

**P1 :** Pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $N_t$  est finie presque sûrement.

**P2 :**  $(N_t)_t$  est un *processus de comptage* pour presque tout  $\omega \in \Omega$  c'est-à-dire que les trajectoires  $t \mapsto N_t(\omega)$  sont à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}} := \{0, 1, \dots, \infty\}$ , croissantes, continues à droites, nulles en 0 et de sauts de taille 1.

**P3 :** Si  $N_{t-}$  désigne la limite à gauche au point  $t$  de la fonction  $N_t$ , alors pour tout  $t \geq 0$  on a  $N_t = N_{t-}$  presque sûrement.

**P4** :  $(N_t)_t$  est un *processus à accroissements indépendants* c'est-à-dire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour toute suite d'instants  $0 \leq t_1 < \dots < t_k$  les accroissements  $N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$  sont des v.a. indépendantes.

**P5** : Les accroissements du processus  $(N_t)_t$  sont poissonniens, c'est-à-dire que pour tout  $s, t \geq 0$  tel que  $s < t$ , la variable aléatoire  $N_t - N_s$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t - s)$ .

**P6** :  $(N_t)_t$  est un *processus homogène ou à accroissements stationnaires* :

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2, s \geq 0, N_{t_2+s} - N_{t_1+s} \sim N_{t_2} - N_{t_1}.$$

**P7** :  $(N_t)_t$  est un *processus d'évènements rares* :

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h) \quad \forall t \geq 0.$$

*Démonstration.*

Soit  $(N_t)_t$  un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ .

**P1** : D'après la loi forte des grands nombres, la suite  $(S_n)_n$  étant i.i.d. de carré intégrable, on a :

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &\xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow S_n \xrightarrow{p.s.} +\infty \\ &\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \leq t} < \infty \quad p.s. \\ &\Rightarrow N_t < \infty \quad p.s. \end{aligned}$$

**P2** : Par construction, les trajectoires  $t \mapsto N_t(\omega)$  sont à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}}$  et de sauts de taille 1. Soient  $s, t \geq 0$  tels que  $s \leq t$ .

$$N_s = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \leq s} \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \leq t} = N_t$$

d'où les trajectoires croissantes.

On a aussi d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{t \rightarrow a^+} N_t = \lim_{t \rightarrow a^+} \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \leq t} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \leq a} = N_a,$$

ce qui prouve la continuité à droite des trajectoires.

Enfin, les trajectoires sont nulles en 0 car  $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_0 \neq 0) \geq 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$ .

**P3** : Soit  $\omega \in \Omega$ .

On pose  $A(\omega) := \{t \in \mathbb{R} \mid N_t \neq N_{t-}\}$ .

L'aléa étant fixé, on a  $A(\omega) = \{S_n(\omega), n \geq 1\}$ .

Or pour tout  $t \geq 0$ , on a presque sûrement,  $\mathbb{P}(S_n = t) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a donc presque sûrement,  $A \cap \{t\} = \emptyset$ . Donc  $N_t = N_{t-}$  presque sûrement.

**P4 et P5** : Soient  $0 < t_1 < \dots < t_n$  et  $k_1, \dots, k_n$  des entiers.

On cherche à calculer

$$P = \mathbb{P}(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n).$$

Posons  $r_1 = k_1, r_2 = k_1 + k_2, \dots, r_n = k_1 + \dots + k_n$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{P}(N_{t_1} = r_1, N_{t_2} = r_2, \dots, N_{t_n} = r_n) \\ &= \mathbb{P}(N_{t_1} = r_1, N_{t_2} = r_2, \dots, N_{t_{n-1}} = r_{n-1} \mid N_{t_n} = r_n) \mathbb{P}(N_{t_n} = r_n) \end{aligned}$$

D'après la définition de  $N_t$ , on a

$$P = \mathbb{P}(S_{r_1} \leq t_1 < S_{r_1} + 1, \dots, S_{r_{n-1}} \leq t_{n-1} < S_{r_{n-1}} + 1 \mid S_{r_n} \leq t_n < S_{r_n} + 1) \mathbb{P}(N_{t_n} = r_n)$$

D'après 3.7, on sait que la loi des  $n$  premiers instants de sauts  $(S_1, \dots, S_n)$ , conditionnellement à  $\{N_t = n\}$  est la même que celle du réordonnement croissant d'une suite de  $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $n$  v.a. indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0; t_n]$ .

On cherche donc la probabilité que parmi  $k_n$  uniformes indépendantes, il y'en ait  $k_1$  dans  $[0, t_1]$ ,  $k_2$  dans  $[t_1, t_2], \dots, k_n$  dans  $[t_{n-1}, t_n]$ . La probabilité pour que chaque variable uniforme d'appartenir à l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$  est  $p_i := \frac{t_i - t_{i-1}}{t_n}$ .

On a donc

$$\begin{aligned} P &= r_n! \frac{p_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{p_n^{k_n}}{k_n!} e^{-\lambda t_n} \frac{(\lambda t_n)^{r_n}}{r_n!} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}}{k_i!} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

On a montré que les accroissements  $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{i \geq 1}$  sont indépendants et suivent la loi de Poisson de paramètre respectif  $\lambda(t_i - t_{i-1})$ .

**P6 :** Pour tout  $0 \leq t_1 < t_2$ ,  $s \geq 0$ , on a d'après P5,  $N_{t_2+s} - N_{t_1+s} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_2 + s - T_1 - s)) = \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1))$ .

On a donc  $N_{t_2+s} - N_{t_1+s} \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_{t_2} - N_{t_1}$ .

**P7 :** Soit  $t \geq 0$ .

On a, d'après P5 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) &= e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) &= (\lambda h) e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) - \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = o(h).$$

□

### Remarque 3.11

On peut aussi définir un processus de Poisson comme étant un processus stochastique vérifiant P2, P4 et P6. La démonstration de cette équivalence de définitions ne sera pas traitée ici.

### Théorème 3.12

1. On suppose que  $\{\mathcal{T}_j\}$  est une famille de processus de Poisson mutuellement indépendants sur  $]0, \infty[$  d'intensité respective  $\lambda_j$ . On définit  $\lambda := \sum_j \lambda_j < \infty$  et on note  $\mathcal{T} = \cup_j \mathcal{T}_j$ . Alors  $\mathcal{T}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . De plus, pour tout temps  $0 < s < \infty$ , la probabilité que le premier point de  $\mathcal{T}$  suivant le temps  $s$  proviennent de  $\mathcal{T}_j$  est de  $\frac{\lambda_j}{\lambda}$ .
2. Soit  $\mathcal{T}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et soit  $(p_i)_i$  une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}$ . A chaque  $t \in \mathcal{T}$ , on associe une v.a.  $Y_t \in \mathbb{N}$  qui vérifie  $\mathbb{P}(Y_t = i) = p_i$ .

On pose alors  $\mathcal{T}_i = \{t \in \mathcal{T} \mid Y_t = i\}$ . Alors  $\{\mathcal{T}_i\}$  est une famille de Processus de Poisson mutuellement indépendants d'intensité respective  $p_i \lambda$ .

*Démonstration.*

Nous allons démontrer ce théorème dans le cas de deux processus de Poisson vus comme des fonctions de comptage.

1. Soient  $(N_t^1)$  et  $(N_t^2)$  deux processus indépendants, de paramètre respectif  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On va montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $N_t = N_t^1 + N_t^2$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Il est clair que le processus somme  $(N_t)$  est à accroissements indépendants. Vérifions maintenant que  $(N_t)$  est un processus à accroissements stationnaires.

Pour tout  $0 \leq t_1 < t_2$  et pour tout  $s \leq 0$ , on a

$$\begin{aligned} N_{t_2+s} - N_{t_1+s} &= N_{t_2+s}^1 + N_{t_2+s}^2 - (N_{t_1+s}^1 + N_{t_1+s}^2) \\ &= \underbrace{(N_{t_2+s}^1 - N_{t_1+s}^1)}_{\sim \mathcal{P}(\lambda_1(t_2-t_1))} + \underbrace{(N_{t_2+s}^2 - N_{t_1+s}^2)}_{\sim \mathcal{P}(\lambda_2(t_2-t_1))} \end{aligned}$$

Puis par somme de deux v.a. qui suivent une loi de Poisson, on obtient :

$$N_{t_2+s} - N_{t_1+s} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1))$$

et donc, d'après 3.11,  $(N_t)$  est bien un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

2. Soit  $(N_t)$  un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On associe aux instants de saut  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de ce processus une suite de variables de Bernoulli  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de paramètre  $p$ , indépendantes, indépendantes du processus  $(N_t)$ , et de même loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - p.$$

Soit  $N_t^1$ , respectivement  $N_t^2$ , le processus dont les instants de saut sont les  $(S_n)$  tels que  $Y_n = 1$ , respectivement  $Y_n = 0$ . Montrons alors que  $(N_t^1)$  et  $(N_t^2)$  sont des processus de Poisson de paramètres  $\lambda_1 = \lambda p$  et  $\lambda_2 = \lambda(1 - p)$  respectivement.

Il est clair que la suite des temps d'attente du processus  $(N_t^1)$  ou  $(N_t^2)$  est une suite de variables indépendantes. Il faut encore montrer que ces intervalles de temps d'attente suivent des lois exponentielles de même paramètre. Supposons que  $Y_n = 1$ , considérons l'instant de saut  $S_n$  et notons  $X$  le temps d'attente après  $S_n$  du processus  $(N_t^1)$  et  $X_1, X_2, \dots$  les temps d'attente après les temps de saut  $S_n, S_{n+1}, \dots$ . La loi de  $X$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X > t\} \cap \{Y_{n+1} = 0\} \cap \dots \cap \{Y_{n+k-1} = 0\} \cap \{Y_{n+k} = 1\}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X_1 + \dots + X_k > t\} \cap \{Y_{n+1} = 0\} \cap \dots \cap \{Y_{n+k-1} = 0\} \cap \{Y_{n+k} = 1\}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k > t) (1-p)^{k-1} p \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \int_t^{\infty} \lambda \frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda u} du \quad \text{d'après 1.9} \\ &= \int_t^{\infty} \lambda p e^{-\lambda u} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p)u)^{k-1}}{(k-1)!} du \quad \text{d'après Fubini-Tonelli} \\ &= \int_t^{\infty} \lambda p e^{-\lambda u} e^{\lambda(1-p)u} du \\ &= \int_t^{\infty} \lambda p e^{-\lambda p u} du. \end{aligned}$$

On en déduit que  $X$  suit bien une loi exponentielle de paramètre  $\lambda\rho$  et  $(N_t^1)$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda\rho$ . □

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t^N &= \sigma\{N_s; 0 \leq s \leq t\} \\ &= \sigma\{N_t, S_1, S_2, \dots, S_{N_t}\}\end{aligned}$$

**Définition 3.13 : Temps d'arrêt**

Etant donné un processus de Poisson  $\{N_t, t \geq 0\}$ , on appelle temps d'arrêt une v.a.  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  qui possède la propriété suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N.$$

**Remarque 3.14**

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $T = t$  est un temps d'arrêt.  
Pour tout  $n$ ,  $S_n$  est un temps d'arrêt.

A tout temps d'arrêt  $T$  de  $\{N_t, t \geq 0\}$ , on associe la tribu des évènements "déterminés par la trajectoire  $\{N_{\min(t,T)}, t \geq 0\}$  arrêtée à  $T$ " :

$$\mathcal{F}_T^N := \{A \in \mathcal{F}_\infty^N; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N, \forall t \geq 0\}.$$

**Théorème 3.15 : Propriété de Markov forte**

Soit  $\{N_t, t \geq 0\}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et  $T$  un temps d'arrêt de  $\{N_t\}$ . Sur l'évènement  $\{T < \infty\}$ , on pose pour tout  $t \geq 0$

$$N_t^T = N_{T+t} - N_T.$$

Conditionnellement à  $\{T < \infty\}$ ,  $\{N_t^T, t \geq 0\}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , indépendant de  $\mathcal{F}_T^N$ .

*Démonstration.*

On sait que le résultat est vraie si  $T$  est constant.

Supposons que  $T$  prend ses valeurs dans une suite croissante  $(t_j, j \geq 1)$  de réels positifs. Comme  $T$  est un temps d'arrêt, on a

$$\{T = t_j\} = \{T \leq t_j\} \setminus \{T \leq t_{j-1}\} \in \mathcal{F}_{t_j}^N.$$

Soit  $A \in \mathcal{F}_T^N$ ,  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_l$  et  $n_1, \dots, n_l$  dans  $\mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^l \{N_{\tau_k}^T = n_k\}\right)\right) &= \sum_j \mathbb{P}\left(\{T = t_j\} \cap A \cap \left(\bigcap_{k=1}^l \{N_{t_j+\tau_k} - N_{t_j} = n_k\}\right)\right) \\ &= \sum_j \mathbb{P}(\{T = t_j\} \cap A) \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^l \{N_{t_j+\tau_k} - N_{t_j} = n_k\}\right) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^l \{N_{\tau_k} = n_k\}\right).\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que  $\{T = t_j \cap A\} \in \mathcal{F}_{t_j}^N$  pour la seconde égalité, et le fait que le second facteur de l'avant dernière expression ne dépend pas de  $t_j$  par stationnarité des accroissements de  $\{N_t\}$ .

On a établi le résultat pour un temps d'arrêt prenant ses valeurs dans une suite croissante d'instant. On peut

néanmoins approcher tout temps d'arrêt  $T$  par une suite décroissante  $(T_n)_n$  de temps d'arrêt de cette forme. En effet, pour tout  $n$ , posons :

$$T_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} k 2^{-n} \mathbf{1}_{[(k-1)2^{-n} < T < k 2^{-n}]}.$$

Le calcul ci-dessus reste vrai pour le temps d'arrêt  $T_n$  car

$$T < T_n \Rightarrow \mathcal{F}_T^N \subset \mathcal{F}_{T_n}^N.$$

On a donc

$$\mathbb{P} \left( A \cap \left( \bigcap_{k=1}^l \{N_{\tau_k}^{T_n} = n_k\} \right) \right) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^l \{N_{\tau_k} = n_k\} \right).$$

On peut passer à limite quand  $n \rightarrow \infty$  dans le membre de gauche par continuité des trajectoires  $\{N_t, t \geq 0\}$  ce qui achève la preuve.  $\square$

### 3.3 Construction d'une chaîne de Markov en temps continu à partir d'un processus de Poisson.

Cette construction, dite *construction graphique*, utilise le même procédé que la construction du processus d'exclusion qui sera traitée dans la section suivante.

Soit  $(\Omega, \mathbb{H}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité.

On note  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  un processus de Poisson dont les sauts s'effectuent de l'état  $x$  vers l'état  $y$ .

On définit sur cet espace, une famille de processus de Poisson indépendants sur  $]0, \infty[$ ,  $\{\mathcal{T}_{(x,y)} \mid (x, y) \in E^2, x \neq y\}$ .

Les taux de sauts du processus  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  sont donnés par  $q(x, y) = \lambda(x)a(x, y)$ .

#### Construction graphique :

Pour chaque  $x \in E$ , on associe un axe temporel  $[0, \infty[$  définissant ainsi l'espace produit  $E \times [0, \infty[$ .

Pour tout  $t \in \mathcal{T}_{(x,y)}$ , on crée "une flèche" notée  $((x, t); (y, t))$  qui part du point  $(x, t)$  et qui arrive au point  $(y, t)$ .

Pour tout état initial  $x$ , on définit un chemin  $(t, X_t^x)$  pour  $t \in [0, \infty[$  sur l'espace produit  $[0, \infty[ \times E$  qui évolue avec un taux de 1 le long de l'axe temporel et saute instantanément à chaque rencontre avec une flèche sur le point qu'elle désigne.

#### Construction explicite du chemin :

On se donne un état initial  $x$ .

On définit le chemin  $X_t^x$  de la manière suivante :

on pose  $T_0 := 0$ ,  $y_0 := x$  et  $X_0^x := y_0$  ;

on note  $T_1$  le premier instant qu'une flèche part de  $(y_0, t)$ . On suppose que la flèche pointe vers le point  $(y_1, t)$ .

On pose alors :

$$\begin{cases} X_t^x = y_0 & \text{pour } T_0 < t < T_1 \\ X_{T_1}^x = y_1. \end{cases}$$

On répète alors les mêmes étapes :

Soit  $T_2$  le premier instant qu'une flèche part de  $(y_1, t)$ . On suppose que la flèche pointe vers  $(y_2, t)$ .

On pose alors :

$$\begin{cases} X_t^x = y_1 & \text{pour } T_1 < t < T_2 \\ X_{T_2}^x = y_2. \end{cases}$$

En réitérant, on obtient une suite de données temporelles :  $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ ,

et d'états :  $x = y_0, y_1, \dots$ ,

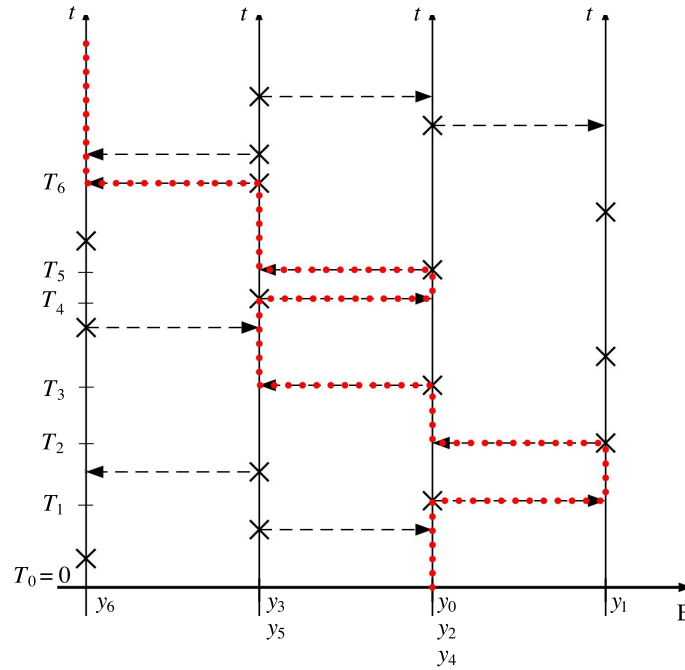
qui possèdent les propriétés suivantes pour tout  $i$  :

- ✓ aucune flèche ne part du point  $(y_i, t)$  pour  $T_i \leq t < T_{i+1}$  ;
- ✓  $((y_i, T_{i+1}); (y_{i+1}, T_{i+1}))$  est une flèche.

Le chemin est alors défini par :

$$X_t^x = y_i \text{ pour } T_i \leq t < T_{i+1}.$$

Graphiquement, si les croix représentent les processus de Poisson et si le chemin est représenté par les segments rouge, on obtient :



Remarque : on a choisi une représentation graphique "simple" dans le sens où seuls les états voisins peuvent être reliés par des flèches. En fait, on doit aussi considérer tous les processus de Poisson entre des états qui ne sont pas voisins (entre  $y_0$  et  $y_3$  par exemple).

### Théorème 3.16

Le chemin  $X_t^x$  définie ci-dessus est un processus de Markov qui possède la propriété suivante : après un saut d'un état  $x$ , le temps attendu en  $x$  suit une loi exponentielle d'espérance  $\frac{1}{\lambda(x)}$ , est indépendant du passé, et l'état d'arrivé  $y$  est sélectionné avec une probabilité  $a(x, y)$  indépendamment du passé.

*Démonstration.*

Nous allons commencer par montrer que  $X_t^x$  est un processus de Markov.

On note  $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_{(x,y)} \mid x, y \in E^2, x \neq y\}$  l'ensemble des processus de Poisson.

On note  $\mathcal{H}_t$  la tribu associée au processus de Poisson sur l'intervalle de temps  $]0, t]$ .

On note  $\Theta_s$  l'opérateur translation défini par  $\Theta_s(N_t) = N_{s+t}$ . L'effet de cet opérateur sur l'application de comptage et sur l'ensemble aléatoire est de réinitialiser le temps initial au temps  $s$  :

$$\begin{aligned} \Theta_s(N(t, u]) &= \Theta_s(N_u) - \Theta_s(N_t) = N(s+t, s+u] \\ \Theta_s(\mathcal{T}) &= \{t-s \mid t \in \mathcal{T}, t > s\}. \end{aligned}$$

D'après la construction de  $X_t^x$ , on peut considérer  $X_t^x$  comme une famille d'applications déterministes  $G_t$ . Ainsi,  $X_t^x = G_t(x, \mathcal{T})$  :  $G_t$  construit l'état  $X_t^x$  à partir de l'état initial  $x$  et de  $\mathcal{T}$ .

On a alors  $p_t(x, y) = \mathbb{P}(X_t^x = y) = \mathbb{P}(G_t(x, \mathcal{T}) = y)$ .

On va construire  $X_{s+t}^x$  en deux étapes, de 0 à  $s$  puis de  $s$  à  $s+t$ . On remarque d'abord que

$$X_{s+t}^x = G_t(X_s^x, \Theta_s(\mathcal{T})).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{s+t}^x = y \mid \mathcal{H}_s) &= \mathbb{P}(G_t(X_s^x, \Theta_s(\mathcal{T})) = y \mid \mathcal{H}_s) \\ &= p_t(X_s^x, y) \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte des remarques suivantes :

- ✓  $X_s^x$  est  $\mathcal{H}_s$ -mesurable ;
- ✓  $\Theta_s(\mathcal{T})$  est indépendant de  $\mathcal{H}_s$  car  $\Theta_s(\mathcal{T})$  ne dépend que des processus de Poisson définis sur  $]s, \infty[$  et que des processus de Poisson définis sur des ensembles disjoints sont indépendants ;
- ✓  $\Theta_s(\mathcal{T})$  suit la même loi que  $\mathcal{T}$  car  $G_t$  ne dépend que de  $(N_s - N_0)_{s \in [0, t]}$  et pas de  $N_0$  par construction du processus de Poisson.

Cette égalité montre que  $X_t^x$  est un processus de Markov avec probabilité de transitions  $p_t(x, y)$ .

Montrons à présent la propriété de ce processus.

Comme pour la construction du processus, on suppose que  $X_{T_n}^x = y_n$ . La construction du chemin à partir du temps  $T_n$  est donnée par

$$X_{T_n+t}^x = G_t(y_n, \Theta_{T_n}(\mathcal{T})).$$

Comme  $T_n$  est un temps d'arrêt pour le processus de Poisson, on a, d'après la propriété de Markov forte (3.15), que  $\Theta_{T_n}(\mathcal{T})$  est indépendante de  $\mathcal{H}_{T_n}$ . De plus, on a vu ci-dessus que  $\Theta_{T_n}(\mathcal{T})$  suit la même loi que  $\mathcal{T}$ .

Alors, l'état  $y_n$  est  $\mathcal{H}_{T_n}$ -mesurable, donc le processus de Poisson translaté  $\Theta_{T_n}(\mathcal{T})$  est aussi indépendant de  $\mathcal{H}_{T_n}$ .

Posons alors  $z = y_n$ . D'après 3.12, appliqué aux processus  $\{\Theta_{T_n}(\mathcal{T}_{(z,y)}) \mid y \in E\}$  et  $\Theta_{T_n}(\mathcal{T}_z) := \cup_y \Theta_{T_n}(\mathcal{T}_{(z,y)})$ , on a que  $\Theta_{T_n}(\mathcal{T}_z)$  est d'intensité  $\sum_y q(x, y) = \lambda(z)$ .

Alors  $T_{n+1} - T_n$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda(z)$ .

Toujours d'après 3.12, la probabilité pour qu'une flèche parte du point  $(z, T_{n+1})$  et arrive au point  $(y, T_{n+1})$  est  $a(z, y)$ . En effet, la probabilité que le premier point de  $\Theta_{T_n} \mathcal{T}_z$  provienne de  $\Theta_{T_n} \mathcal{T}_{(z,y)}$  est  $\frac{q(z, y)}{\lambda(z)} = a(z, y)$ .  $\square$



## 4 Processus d'exclusion.

### 4.1 Construction du processus d'exclusion.

#### 4.1.1 Idées générales

On se donne une matrice de probabilités de transition  $P = (p(x, y))_{x, y \in E}$  sur un réseau  $E = \mathbb{Z}^d$  c'est-à-dire une matrice à coefficients positifs vérifiant  $\sum_{y \in E} p(x, y) = 1$  pour tout  $x \in E$ .

On suppose que pour tout  $x, y \in E$ ,  $p(x, y)$  est :

1. invariant par translation :  $p(x, y) = p(0, y - x)$
2. de rang fini : il existe un ensemble fini  $B^p \subseteq E$  tel que  $p(0, x) = 0$  pour tout  $x \notin B^p$ .

On va construire un processus de Markov selon l'idée suivante. Des particules sont placées en certains points de  $E$  ; on appellera ces points des *sites*, avec la seule contrainte que deux particules ne peuvent pas occuper le même site. Chaque particule attend un temps aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, indépendamment des autres particules, avant de sauter sur un autre site. Plus précisément, si la particule est en  $x$ , elle choisit un nouveau site  $y$  avec probabilité  $p(x, y)$ . Si le site  $y$  est libre, la particule saute en  $y$  et si le site  $y$  est occupé alors la particule reste en  $x$  et attend un nouveau temps aléatoire, de loi exponentielle, indépendamment du passé et du reste du système avant d'essayer de sauter sur un autre site. Toutes les particules du système sont régies par ce cycle d'attente et de sauts. Les temps d'attente et les choix du site lors des sauts sont mutuellement indépendants et indépendant du reste du système. Les interactions entre les particules répondent au principe d'exclusion : les sauts de particules sur des sites déjà occupés ne sont pas autorisés. Sans cette règle, toutes les particules évolueraient "simplement" comme des chaînes de Markov définies sur  $E$  avec des probabilités de saut données par la matrice  $P$ .

Comme les temps d'attente sont donnés par une loi à densité continue ; deux particules ne peuvent pas essayer de sauter en même temps avec probabilité 1, donc on ne considèrera aucun conflit entre deux particules qui souhaiteraient aller sur le même site vacant.

On peut supposer que  $p(0, 0) = 0$ .

On peut ainsi définir un autre noyau de transition

$$\tilde{p}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{p}(0, x) = \frac{p(0, x)}{1 - p(0, 0)} \quad \forall x \neq 0.$$

Ce noyau de transition permet de supprimer les cas où une particule saute de nouveau sur son site : ce cas n'ayant aucun effet sur la configuration du système. On continuera de noter  $p(x, y)$  les probabilités de transition.

Définissons à présent l'état du système comme un ensemble de sites occupés ou vacants. Pour tout  $x \in E$ , on définit  $\eta(x) := 1$  si  $x$  est occupé et  $\eta(x) := 0$  si  $x$  est vacant.

On introduit alors la configuration du système

$$\eta := \{\eta(x) \mid x \in E\}$$

sur l'espace d'état  $X = \{0, 1\}^E$ .

L'objectif de cette section est de construire rigoureusement un processus de Markov  $\eta_t = (\eta_t(x))_{x \in E}$  répondant au mécanisme présenté ci-dessus.

#### Remarque 4.1

L'espace d'états  $X$  n'est pas dénombrable donc l'existence d'un tel processus n'est pas garantie par les constructions précédentes.

### 4.1.2 Représentation graphique du processus d'exclusion

Soit  $E_p^2 := \{(x, y) \in E^2 \mid p(x, y) > 0\}$ , l'ensemble des paires de sites pour lesquels des sauts sont possibles. Soit  $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P})$  l'espace de probabilité sur lequel on définit une famille  $\{\mathcal{T}_{(x,y)} \mid (x, y) \in E_p^2\}$  de processus de Poisson mutuellement indépendants définis sur l'intervalle de temps  $[0, \infty[$ . Le processus de Poisson  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  est homogène et d'intensité  $p(x, y)$ . Les temps de saut de  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  sont les temps aléatoires pour lesquels il peut y avoir un saut entre  $x$  et  $y$ .

On pose :

$$\mathcal{T}_x = \bigcup_y \mathcal{T}_{(x,y)},$$

qui est l'ensemble des temps pour lesquels une particule peut sauter de l'état  $x$  (si  $x$  est occupé). C'est un processus de Poisson d'intensité  $\sum_y p(x, y) = 1$ .

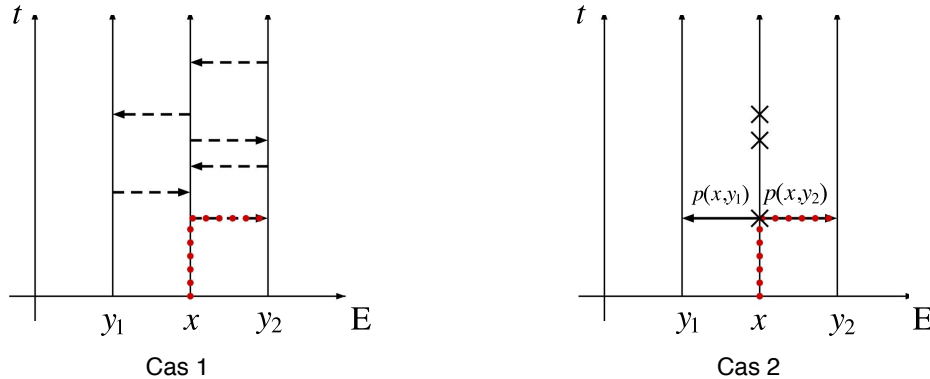
On pose aussi :

$$\mathcal{T}'_x = \bigcup_y (\mathcal{T}_{(x,y)} \cup \mathcal{T}_{(y,x)}),$$

qui est l'ensemble des temps pour lesquels une particule peut sauter de  $x$  ou arriver en  $x$ . C'est un processus de Poisson d'intensité  $\sum_y (p(x, y) + p(y, x)) = \sum_y p(x, y) + \sum_y p(0, x - y) = 2$  (d'après l'hypothèse d'invariance).

D'après 3.12, associer des processus de Poisson indépendants  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  à chaque arête  $(x, y)$  (Cas 1) est équivalent à associer un processus de Poisson  $\mathcal{T}_x$  d'intensité 1 pour chaque site  $x$ , puis associer chaque  $t \in \mathcal{T}_x$  à une arête particulière  $(x, y)$  avec probabilité  $p(x, y)$  (Cas 2). Heuristiquement, à la place d'avoir une horloge en  $x$  puis choisir aléatoirement un site  $y$  avec probabilité  $p(x, y)$  quand l'horloge sonne, on attache des horloges à toutes les arêtes  $(x, y)$  possibles et on saute lorsque l'une d'elles sonne.

Graphiquement, les deux points de vue se représentent ainsi : (on continue de dessiner la trajectoire en rouge et de représenter les processus de Poisson par des croix ou des flèches en pointillées)



Soit  $\omega \in \Omega$  (autrement dit, on fixe un ensemble  $\{\mathcal{T}_{(x,y)}\}$  de processus de Poisson).

En négligeant les ensembles de  $\mathbb{P}$ -mesure nulle, on fait la supposition suivante :

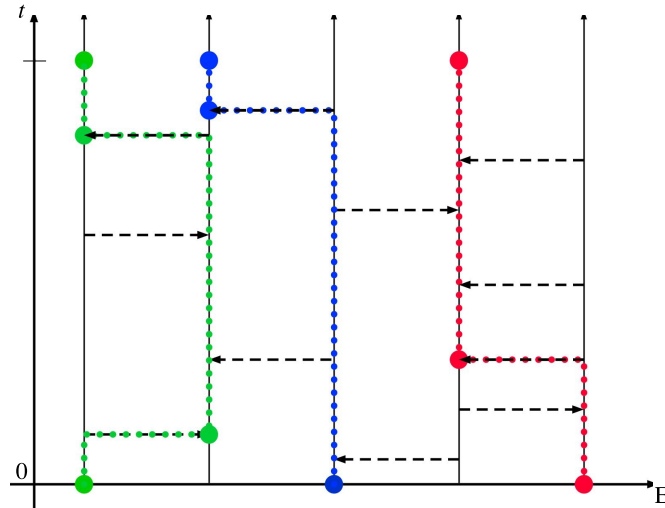
**Remarque 4.2 : Hypothèses importantes**

Pour tout  $x \in E$ , on suppose que  $\mathcal{T}'_x$  contient seulement un nombre fini de temps de saut dans tout intervalle borné  $]0, T]$ , et on suppose aussi que deux processus distincts  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  et  $\mathcal{T}_{(y,x)}$  n'ont pas de temps de saut en commun.

On fixe une configuration initiale  $\eta \in X$ .

La représentation graphique consiste en la construction suivante. A chaque  $x \in E$ , on attribue un axe temporel vertical. A chaque temps de saut  $t \in \mathcal{T}_{(x,y)}$ , on dessine une flèche de  $(x, t)$  vers  $(y, t)$ . On place notre configuration initiale en  $t = 0$ . Une fois le processus commencé, toutes les particules montent verticalement le long de leur axe temporel à la même vitesse. Quand une particule rencontre une flèche en  $(x, t)$  et pointant vers  $(y, t)$ , elle bouge instantanément le long de la flèche pour arriver en  $y$  si le site  $y$  est libre, ou reste en  $x$  si le site  $y$  est occupé. Ainsi, chaque particule décrit une trajectoire dans le graphique.

Graphiquement, si l'on se donne une configuration initiale avec trois particules (une verte, une bleue et une rouge), on peut représenter leur trajectoire respective en suivant le procédé décrit plus haut :



### Problèmes de cette construction :

Supposons que l'on calcule  $\eta_t(0)$  pour  $t > 0$ .

Cette valeur est potentiellement influencée par  $\eta_s(x)$  pour  $0 \leq s \leq t$  pour tous les sites  $x$  qui interagissent avec 0 pendant l'intervalle de temps  $]0, t]$ . Autrement dit, on doit aussi s'intéresser aux états  $x$  pour lesquels  $\mathcal{T}_{(x,0)}$  ou  $\mathcal{T}_{(0,x)}$  ont un temps de saut qui appartient à  $]0, t]$ . Mais alors, en connaissant  $\eta_s(x)$  pour  $0 \leq s \leq t$  et pour tous ces sites  $x$ , on doit aussi considérer ce qui se passe pour tous les sites  $y$  qui interagissent avec les sites  $x$  et ainsi de suite...

De plus, pour suivre l'évolution d'une chaîne de Markov, il faut attendre le premier temps de saut, qui modifiera la configuration du système. Mais l'état initial  $\eta$  contient, à priori, une infinité de particules. Il y'a donc une infinité de sauts possibles dans un petit intervalle de temps  $]0, \epsilon[$ .

Comment construire rigoureusement un tel procédé ?

### 4.1.3 L'argument de percolation

L'argument de percolation garantie que pour un petit intervalle de temps déterministe  $[0, t_0]$ , l'ensemble  $E$  peut être décomposé en une union disjointe de composantes connexes finies qui n'interagissent pas entre-elles. Pour chacune de ces composantes finies, l'évolution de la configuration  $\eta_t$  pour  $0 \leq t \leq t_0$  peut alors être construite car on ne peut considérer qu'un nombre fini de temps de saut.

Pour  $0 \leq s \leq t$ , on note  $\mathcal{G}_{s,t}$  le graphe aléatoire non orienté dont les sommets sont les points de  $E$  et dont l'ensemble des arêtes est  $\mathcal{E}_{s,t}$  défini par

$$\mathcal{E}_{s,t} = \{\{x, y\} \in E^2 \mid \mathcal{T}_{x,y} \text{ ou } \mathcal{T}_{y,x} \text{ contient un temps de saut dans l'intervalle } ]s, t]\}.$$

Ainsi, pour calculer l'évolution de la configuration  $\eta_s(x)$  pour  $0 \leq s \leq t$ , seuls les sites qui se trouvent dans la même composante connexe que  $x$  dans le graphe  $\mathcal{G}_{0,t}$  sont nécessaires.

**Lemme 4.3**

Chaque arête  $\{x, y\}$  appartient au graphe  $\mathcal{G}_{s,t}$  avec une probabilité égale à  $1 - e^{-(t-s)(p(x,y)+p(y,x))}$ , indépendamment des autres noeuds.

*Démonstration.*

On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{x, y\} \in \mathcal{G}_{s,t}) &= \mathbb{P}(\{x, y\} \in \mathcal{E}_{s,t}) \\
&= \mathbb{P}(\mathcal{T}_{(x,y)} \text{ ou } \mathcal{T}_{(y,x)} \text{ a un temps de saut dans l'intervalle } ]s, t]) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\mathcal{T}_{(x,y)} \text{ et } \mathcal{T}_{(y,x)} \text{ n'ont pas de temps de saut dans l'intervalle } ]s, t]) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\mathcal{T}_{(x,y)} \text{ n'a pas de temps de saut dans l'intervalle } ]s, t]) \times \\
&\quad \mathbb{P}(\mathcal{T}_{(y,x)} \text{ n'a pas de temps de saut dans l'intervalle } ]s, t]) \quad \text{par indépendance,} \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{le temps d'attente du processus } \mathcal{T}_{(x,y)} \text{ est plus grand que } t - s) \times \\
&\quad \mathbb{P}(\text{le temps d'attente du processus } \mathcal{T}_{(y,x)} \text{ est plus grand que } t - s) \\
&= 1 - e^{-(t-s)(p(x,y)+p(y,x))} \quad \text{car les temps d'attente suivent des lois exponentielles.}
\end{aligned}$$

□

**Proposition 4.4**

Pour  $t_0$  suffisamment petit, le graphe aléatoire  $\mathcal{G}_{0,t_0}$  a presque sûrement des composantes connexes finies.

*Démonstration.*

On note  $B_* := B^p \cup (-B^{-p})$  et  $R := \max_{x \in B_*} |x|_\infty$  le rayon et  $k_* := \text{Card}(B_*)$ .

D'après l'hypothèse de rang fini, on sait que  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  peut contenir des temps de saut ssi  $y - x \in B^p$  c'est-à-dire ssi  $\{x, y\} \in \mathcal{E}_{0,t}$ . On alors nécessairement que  $y - x \in B_*$  et  $x - y \in B_*$  et donc

$$|y - x|_\infty \leq R.$$

Montrons que si  $t_0 > 0$  est fixé suffisamment petit alors la composante connexe qui contient l'origine est finie presque sûrement.

Estimons la probabilité qu'il existe un site  $y$  qui appartient à la même composante connexe que 0 et un réel  $L$  tel que  $|y|_\infty \geq L$ . Alors il existe un chemin de 0 à  $y$ . Plus précisément, il existe  $x_0, x_1, \dots, x_m \in E$  tel que

$$0 = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_m = y.$$

De plus, chaque arête  $\{x_i, x_{i+1}\}$  ne peut être séparée que par une distance au plus égale à  $R$ . On a donc :

$$L \leq |y|_\infty \leq |x_m - x_{m-1}| + \dots + |x_1 - x_0| \leq mR,$$

ce qui donne

$$m \geq L/R.$$

Par ailleurs, une suite de sites  $x_0, \dots, x_m$  vérifiant  $x_{i+1} - x_i \in B_*$  forment un chemin dans le graphe  $\mathcal{G}_{0,t_0}$  avec probabilité

$$\prod_{i=0}^{m-1} (1 - e^{-t_0(p(x_i, x_{i+1}) + p(x_{i+1}, x_i))}) \leq (1 - e^{-2t_0})^m.$$

Aussi, le nombre possible de chemin allant de 0 à  $y$  commençant à l'origine et de longueur  $m$  est  $k_*^m$  car chaque sommet  $x_{i+1}$  doit être choisi parmi les  $k_*$  éléments de l'ensemble  $x_i + B_*$ .

On fixe  $t_0$  suffisamment petit tel que  $k_*(1 - e^{-2t_0}) < 1$  (c'est un choix déterministe).

On note l'évènement

$$A_m := \{\text{il existe un chemin de longueur } m \text{ dans le graphe à partir de l'origine } 0\}.$$

On a alors :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} k_*^m (1 - e^{-2t_0})^m < \infty.$$

D'après le théorème de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{m \rightarrow \infty} k_*^m (1 - e^{-2t_0})^m\right) = 0.$$

Donc, avec probabilité 1, on a au plus un nombre fini d'évènements  $A_m$  qui se réalisent.

Donc il existe presque sûrement un réel  $L$  (aléatoire) fini pour lequel 0 n'est connecté à aucun sommet  $y$  tel que  $|y|_{\infty} \geq L$ .

On a montré que si  $t_0 > 0$  est fixé suffisamment petit alors la composante connexe qui contient l'origine est fini presque sûrement.

Enfin, d'après l'hypothèse d'invariance par translation, l'espérance de  $\mathbb{1}_{\{x,y\} \in \mathcal{E}_{0,t_0}}$  est invariante par translation.

Alors la probabilité qu'un sommet  $x$  appartienne à une composante connexe infini est la même pour chaque  $x$ . On en déduit alors, par ce qui précède, que cette probabilité est nulle.  $\square$

Afin de construire le processus  $\eta_t$  pour  $0 \leq t \leq t_0$ , nous allons le construire séparément sur chaque composante connexe fini du graphe  $\mathcal{G}_{0,t_0}$ . Aussi, ne considérer qu'une seule composante connexe pendant l'intervalle de  $[0, t_0]$  est équivalent à ne considérer qu'un nombre fini d'arêtes sur le graphe  $\mathcal{G}_{0,t_0}$  d'après la remarque 4.2.

#### 4.1.4 Construction du processus avec un nombre fini de temps de saut

D'après ce qui précède, construire le processus d'exclusion avec un nombre fini de temps de saut revient à construire le processus sur une composante connexe fini du graphe.

On suppose donc qu'il y'a un nombre fini de sauts qui interviennent aux temps  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ . On note  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  les paires de sites tel que  $\tau_k \in \mathcal{T}_{(x_k, y_k)}$  pour  $k = 1, \dots, n$ .

On rappelle que l'on a fixé la configuration initiale  $\eta$ . On pose :

$$\eta_t = \eta_0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \tau_1.$$

Si  $x_1$  est occupé et  $y_1$  est libre en  $\tau_1^-$  (qui correspond au temps "juste avant"  $\tau_1$ ), alors on bouge la particule de  $x_1$  à  $y_1$  au temps  $\tau_1$  et on pose alors

$$\eta_{\tau_1} := \eta_{\tau_1^-}^{x_1, y_1}.$$

On introduit alors la notation  $\eta^{x,y}$  qui correspond à la configuration du système à partir de l'état initial  $\eta$  après avoir échangé  $\eta(x)$  et  $\eta(y)$ , c'est-à-dire

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(y), & \text{si } z = x \\ \eta(x), & \text{si } z = y \\ \eta(z), & \text{si } z \neq x, y. \end{cases}$$

Si  $x_1$  est libre ou  $y_1$  occupé en  $\tau_1^-$ , le système en change pas et on pose :

$$\eta_{\tau_1} = \eta_{\tau_1^-}.$$

On a donc défini le processus sur l'intervalle de temps  $[0, \tau_1]$ .

On poursuit la construction du processus par récurrence.

On suppose que l'on a construit l'état  $\eta_t$  pour  $0 \leq t \leq \tau_k$ . On pose alors

$$\eta_t = \eta_{\tau_k} \text{ pour } \tau_k < t < \tau_{k+1}.$$

Si  $\eta_{\tau_{k+1}^-}(x_{k+1}) = 1$  et  $\eta_{\tau_{k+1}^-}(y_{k+1}) = 0$ , on pose

$$\eta_{\tau_{k+1}} := \eta_{\tau_{k+1}^-}^{x_{k+1}, y_{k+1}},$$

et si  $\eta_{\tau_{k+1}^-}(x_{k+1}) = 0$  et  $\eta_{\tau_{k+1}^-}(y_{k+1}) = 1$ , on pose

$$\eta_{\tau_{k+1}} = \eta_{\tau_{k+1}^-}.$$

Ce procédé de construction est répété jusqu'à ce que la construction soit finie sur  $[0, t_0]$  pour une composante connexe. Comme la composante connexe est finie, on sait (d'après la remarque 4.2) que l'on atteint le temps  $t_0$  après un nombre fini de temps de saut, ce qui justifie que le procédé de construction se termine.

On répète ce procédé de construction sur chaque composante connexe du graphe  $\mathcal{G}_{0, t_0}$ . On a alors construit le procédé d'exclusion sur  $[0, t_0]$ .

#### 4.1.5 Construction du processus en tout temps

A ce stade, pour une configuration initiale  $\eta$  donné, on peut construire l'évolution  $\eta_t$  pour  $0 \leq t \leq t_0$  pour presque toute réalisation des processus de Poisson  $\{\mathcal{T}_{(x,y)}\}$ .

Pour construire l'évolution au-delà du temps  $t_0$ , on considère l'état  $\eta_{t_0}$  comme nouvelle configuration initiale et on utilise les processus de Poisson restreints à l'intervalle de temps  $]t_0, 2t_0]$ .

La proposition 4.4 garantie de nouveau, qu'avec une probabilité 1, les composantes connexes du graphe aléatoire  $\mathcal{G}_{t_0, 2t_0}$  sont finies. Ainsi, la construction détaillée ci-dessus s'applique de nouveau de  $t_0$  à  $2t_0$ .

En continuant cette construction pas à pas, on a montré que l'on peut construire l'évolution  $\eta_t$  pour tout temps  $0 \leq t < \infty$  de toute configuration initiale  $\eta$  et pour tout ensemble (de mesure non nulle) de processus de sauts markoviens  $\{\mathcal{T}_{(x,y)}\}$ .

#### Remarque 4.5

La construction présentée ici ne semble pas correspondre totalement à la démarche expliquée au début de la section. En effet, dans le processus, chaque particule attend un temps de loi exponentielle puis tente de sauter. Dans notre construction, les horloges  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  sont attachées sur chaque arête entre  $x$  et  $y$ . Ces deux points de vue sont en fait équivalents grâce à l'absence de mémoire de la loi exponentielle :

On note  $0 < T_1 < T_2 < \dots$  les temps où la particule, initialement située en  $x_0$ , va essayer de sauter à un autre état. On note  $x_k$ , l'état de la particule au temps  $T_k$ . Comme les  $(T_i)_i$  sont des temps d'arrêt pour les processus de Poisson, d'après la propriété de Markov forte, on peut considérer que les processus de Poisson sont "réinitialisés" au temps  $T_k$  indépendamment du passé (et donc des états  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ). Donc pour la particule, après le temps  $T_k$ , l'horloge  $\mathcal{T}_{(x_k, y)}$  sonne avec une probabilité de saut  $p(x_k, y)$  indépendamment du passé, comme si la particule suivait sa propre horloge.

## 4.2 Propriétés de la construction.

Le but de cette section est de prouver des résultats de mesurabilité et de continuité relatifs à la construction.

### Rappels et notations :

On rappelle que les configurations  $\eta$  du système sont définies sur l'espace d'états  $X = \{0, 1\}^E$ .

On munit  $X$  de la métrique :

$$\forall \eta, \xi \in X, \quad d(\eta, \xi) := \sum_{x \in E} 2^{-|x|_\infty} |\eta(x) - \xi(x)|.$$

On dit qu'une suite de configurations  $\eta^{(n)}$  converge vers une configuration  $\eta$ , c'est-à-dire que  $d(\eta^{(n)}, \eta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ssi pour tout ensemble fini  $A \subseteq E$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\eta^{(n)}(x) = \eta(x)$  pour tout  $x \in A$  et pour tout  $n \geq n_0$ .

On munit  $X$  de la tribu borélienne associée.

On rappelle les notations suivantes :

$$D_X = \{\eta : [0, +\infty[ \rightarrow X \mid \eta \text{ est une trajectoire cadlag}\}.$$

On munit  $D_X$  de la tribu  $\mathcal{F}$  engendrée par les applications  $\eta \mapsto \omega_t$  pour tout  $t \geq 0$  (voir 1.23).

On adopte le point de vue suivant :

Les processus de Poisson sont vus comme des fonctions  $\omega(\cdot) = (N_{(x,y)}(\cdot))_{(x,y) \in E_p^2}$  où  $N_{(x,y)}(t) = \text{Card}(\mathcal{T}_{(x,y)} \cap ]0, t])$  pour tout  $t \geq 0$ .

On remarque que la trajectoire  $t \mapsto N_{(x,y)}(t)$  est un élément de  $D_{\mathbb{N}}$ .

$\omega(t) = (N_{(x,y)}(t))_{(x,y) \in E_p^2}$  est un élément de l'espace produit  $U := \mathbb{N}^{E_p^2}$ .

On munit  $U$  de la métrique

$$\forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in U, \quad d_U(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \sum_{(x,y) \in E_p^2} 2^{-|x|_\infty - |y|_\infty} (|m_{(x,y)} - n_{(x,y)}| \wedge 1).$$

$\omega := (\omega(t) \mid t \geq 0)$  est un élément de l'espace  $D_U$  métrisé par la métrique de Skorohod.

$D_U$  est muni de la tribu borelienne  $\mathcal{B}(D_U)$  (voir 1.23).

L'espace de probabilité sur lequel sont définis les processus de Poisson est donc :

$$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P}) = (D_U, \mathcal{B}(D_U), \mathbb{P}).$$

On note  $\Omega_0$  l'ensemble des chemins (ensemble noté  $\omega$ ) qui satisfont 4.2 et pour lesquels le graphe aléatoire  $\mathcal{G}_{kt_0, (k+1)t_0}$  a des composantes connexes finies pour tout entier  $k$ .

On a construit le processus d'exclusion comme étant une fonction d'un état initial  $\eta \in X$  et d'une trajectoire  $\omega \in \Omega_0$ . Afin d'exprimer la dépendance d'une configuration en  $(\eta, \omega)$ , on introduit les notations suivantes :

$\eta_t^\eta(\omega)$  : la configuration du processus au temps  $t \geq 0$ ;

$\eta_t^\eta(x, \omega)$  : l'état du site  $x$  (occupé ou non) ;

$\eta^\eta$  : le processus de configuration initiale  $\eta$ .

### Théorème 4.6

Pour tout  $(\eta, \omega) \in X \times \Omega_0$ , la fonction  $t \mapsto \eta_t^\eta(\omega)$  est continue à droite et a des limites à gauche pour tout  $t \geq 0$ .

*Démonstration.*

Soit  $r > 0$ . On considère la boule  $B = \{x \in E \mid |x|_\infty \leq r\}$ .

D'après 4.2, le processus de Poisson  $\bigcup_{x \in B} \mathcal{T}'_x$  contient un nombre fini de points dans  $]t, T[$  pour tout  $0 \leq t < T < \infty$ .

Soit  $t \geq 0$ .

Il existe  $\delta(r) > 0$  tel que  $\bigcup_{x \in B} \mathcal{T}'_x$  n'a pas de temps de saut dans  $]t, t + \delta[$ . On a alors

$$\eta_t^\eta(x, \omega) = \eta_s^\eta(x, \omega) \quad \text{pour } x \in B \text{ et } t \leq s < t + \delta.$$

Donc

$$\begin{aligned}
d(\eta_t^\eta(\omega), \eta_s^\eta(\omega)) &\leq \sum_{x \notin E} 2^{-|x|_\infty} \\
&= \sum_{\{x \mid |x|_\infty > r\}} 2^{-|x|_\infty} \\
&= \sum_{n=r+1}^{\infty} 2^{-n} \times \text{Card}(x \mid |x|_\infty = n) \\
&\leq \sum_{n=r+1}^{\infty} 2^{-n} 2d(2n+1)^{d-1} \\
&\leq 2d \underbrace{\sum_{n=r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (2n+1)^{d-1}}_{\text{reste d'une s\u00e9rie convergente}}
\end{aligned}$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a, pour  $r$  suffisamment grand (et donc pour  $\delta$  suffisamment petit) :

$$d(\eta_t^\eta(\omega), \eta_s^\eta(\omega)) < \epsilon.$$

On a montr\u00e9 que

$$d(\eta_t^\eta(\omega), \eta_s^\eta(\omega)) \xrightarrow{s \rightarrow t^+} 0.$$

Donc la fonction  $t \mapsto \eta_t^\eta(\omega)$  est continue \u00e0 droite.

Pour la limite \u00e0 gauche, il faut consid\u00e9rer le cas o\u00f9  $t \in \mathcal{T}'_x$  pour un certain  $x$  :  $\eta_{t-\delta}^\eta(x, \omega)$  peut alors \u00eatre diff\u00e9rent de  $\eta_t^\eta(x, \omega)$  pour  $\delta > 0$  suffisamment petit.

Mais pour tout site  $x \in E$ , il existe  $\delta_x > 0$  tel que  $\mathcal{T}'_x$  n'a pas de temps de saut dans  $]t - \delta_x, t[$ . Alors

$$\eta_s^\eta(x, \omega) = \eta_u^\eta(x, \omega) \quad \forall s, u \in ]t - \delta_x, t[.$$

Et donc la limite

$$\eta_{t-}^\eta(x, \omega) = \lim_{s \rightarrow t^-} \eta_s^\eta(x, \omega) \quad \text{existe.}$$

Comme la convergence dans  $X$  se fait coordonn\u00e9e par coordonn\u00e9e, on a bien l'existence de la limite \u00e0 gauche :

$$\eta_{t-}^\eta(\omega) = \lim_{s \rightarrow t^-} \eta_s^\eta(\omega).$$

Conclusion :  $t \mapsto \eta_t^\eta(\omega) \in D_X$ . □

### Th\u00e9or\u00e8me 4.7

La trajectoire  $t \mapsto \eta_t^\eta(\omega)$  est une fonction de  $D_X$  continue en  $(\eta, \omega) \in X \times \Omega_0$ .

*D\u00e9monstration.*

Soit  $(\eta, \omega) \in X \times \Omega_0$ .

Soient  $A \subseteq E$  une boule et  $T < \infty$ .

Soit  $k \geq 0$  tel que  $(k-1)t_0 < T \leq t_0$  o\u00f9  $t_0$  v\u00e9rifie la propri\u00e9t\u00e9 4.4.

Montrons la propri\u00e9t\u00e9 ★ suivante :

Il existe un ensemble fini  $B \subseteq E$  tel que si  $\xi, \eta \in X$  v\u00e9rifient  $\xi = \eta$  sur  $B$  alors

$$\eta_t^\xi(x, \omega) = \eta_t^\eta(x, \omega) \quad \forall x \in A, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$



Par récurrence, montrons, pour tout  $k \geq 1$ , la propriété :

$H_k$  : " $\forall A \subset E, \exists B_{k,A} := B_{k,A}, \omega \subset E$  tel que si  $\zeta(x) = \eta(x) \forall x \in B_{k,A}$  alors  $\eta_t^\zeta(x, \omega) = \eta_t^\eta(x, \omega) \forall x \in A \forall t \in [0, kt_0]$ ".

Pour  $k = 1$ , l'argument de percolation 4.4 permet de conclure en posant, pour tout  $A \subset E$ ,

$$B_{1,A} := \bigcup_{x \in A} C_{0,t_0}(x).$$

Supposons maintenant qu'il existe, pour tout  $A \subset E$ , un ensemble  $B_{k,A}$  satisfaisant la propriété ci-dessus. Soit  $A \subset E$ .

Posons

$$A' = \bigcup_{x \in A} C_{kt_0, (k+1)t_0}(x).$$

Alors, il suffit de prendre

$$B_{k+1,A} := B_{k,A'}$$

qui satisfait la propriété  $H_{k+1}$ . En effet, si un état  $\eta_{kt_0}$  au temps  $kt_0$  est donné, alors l'évolution  $\{\eta_t(x) \mid kt_0 \leq t \leq (k+1)t_0\}$  ne dépend que des valeurs  $\{\eta_{kt_0}(y) \mid y \in C_{kt_0, (k+1)t_0}(x)\}$  d'après l'argument de percolation.

On a montré que pour 2 configurations initiales identiques, chaque site de  $A$  est dans le même état pour tout temps de  $[0, T]$ .

Soit  $\epsilon > 0$ .

Il existe  $\delta'(\epsilon) > 0$  tel que pour tout  $\delta < \delta'$ , pour tout  $\omega' := (N'_{(x,y)}(\cdot))$  un autre élément de  $\Omega_0$  tel que  $d_s(\omega, \omega') < \delta$  ;

il existe un élément  $\lambda \in \Lambda$  vérifiant  $\|\lambda\|^o < \epsilon$  et pour lequel on a :

pour tout  $(x, y) \in B^2$ ,

$$N_{(x,y)}(t) = N'_{(x,y)}(\lambda(t)) \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

Quitte à réduire  $\delta$ , on peut supposer que  $d(\eta, \xi) < \delta$  implique que  $\eta = \xi$  sur  $B$ .

Pour tout  $(\xi, \omega') \in X \times \Omega_0$  tel que  $d(\eta, \xi) + d_s(\omega, \omega') < \delta$ , on a, pour tout  $x \in A$  et pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} \eta_t^\eta(x, \omega) &= \eta_t^\xi(x, \omega) \text{ d'après } \star ; \\ &= \eta_t^\xi(x, \omega' \circ \lambda) \text{ car les trajectoires } \omega \text{ et } \omega' \circ \lambda \text{ coïncident sur } B \text{ jusqu'au temps } T, \\ &= \eta_{\lambda(t)}^\xi(x, \omega') \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que le nombre de sauts de la trajectoire  $\omega'(\lambda(\cdot))$  dans l'intervalle  $]s, t]$  est le même que ceux de la trajectoire  $\omega'$  dans  $]s, t]$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} d(\eta_t^\eta(\omega), \eta_{\lambda(t)}^\xi(\omega')) &= \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{x \in E} 2^{-|x|_\infty} |\eta_t^\eta(x, \omega) - \eta_{\lambda(t)}^\xi(x, \omega')| \\ &\leq \sum_{x \notin A} 2^{-|x|_\infty}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité peut être choisie aussi petite que l'on veut en choisissant convenablement la boule  $A$ . Et donc,  $d(\eta, \eta^{(n)}) + d_s(\omega, \omega^{(n)}) \rightarrow 0$  implique, d'après 1.20, que

$$d_s(\eta^{(n)}(\omega^{(n)}), \eta^\eta(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui montre bien la continuité de  $\eta^\eta(\omega)$  en  $(\eta, \omega) \in X \times \Omega_0$ . □

**Corollaire 4.8**

L'application  $\omega \mapsto \left( \begin{array}{cc} [0, \infty[ & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & \eta_t^\eta(\omega) \end{array} \right)$  est une application mesurable de  $\Omega_0$  dans  $D_X$  pour tout  $\eta \in X$ .

*Démonstration.*

On a montré dans la preuve de 4.7, que  $(\eta, \omega) \mapsto \left( \begin{array}{cc} [0, \infty[ & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & \eta_t^\eta(\omega) \end{array} \right) \in D_X$  est continue.

En particulier,  $\omega \mapsto \left( \begin{array}{cc} [0, \infty[ & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & \eta_t^\eta(\omega) \end{array} \right)$  est continue pour tout  $\eta \in X$ .

Donc  $\eta^\eta(\omega)$  est  $\mathcal{B}(D_U)$ -mesurable. □

On note  $\mathbb{P}^\eta$  la mesure de probabilité sur  $(D_X, \mathcal{F})$  définie par :

$$\mathbb{P}^\eta(A) = \mathbb{P}(\omega \mid \eta^\eta(\omega) \in A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}.$$

On rappelle aussi la tribu

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{\eta_s \mid 0 \leq s \leq t\}.$$

**Théorème 4.9**

La famille  $\{\mathbb{P}^\eta \mid \eta \in X\}$  de mesures de probabilités sur  $D_X$  est un processus de Markov, c'est-à-dire :

1.  $\mathbb{P}^\eta[\eta_0 = \eta]$  ;
2. Pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , l'application  $\eta \mapsto \mathbb{P}^\eta(A)$  est mesurable ;
3.  $\mathbb{P}^\eta[\eta_{t+} \in A \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}^{\eta_t}(A)$   $\mathbb{P}^\eta$ -p.s. pour tout  $\eta \in X$  et  $A \in \mathcal{F}$ .

*Démonstration.*

1. Immédiat car  $\eta_0^\eta(\omega) = \eta$ .
2. On note  $\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{F} \mid \eta \mapsto \mathbb{P}^\eta(A) \text{ est mesurable}\}$ .

$\mathcal{M}$  est un  $\lambda$ -système.

On note  $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} \mid A = \{\eta \in D_X \mid \eta_{t_1} \in H_1, \dots, \eta_{t_k} \in H_k\} \text{ où } k \in \mathbb{N} \text{ et } H_1, \dots, H_k \text{ sont des boréliens de } X\}$ .  
 $\mathcal{C}$  est stable par intersections finies et on a  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ .

$\mathcal{C}$  est donc un  $\Pi$ -système. D'après le théorème de Dynkin,  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}$ .

Nous allons montrer que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ . Pour cela, montrons que pour tout  $A \in \mathcal{C}$ ,  $\eta \mapsto \mathbb{P}^\eta(A)$  est mesurable.

La fonction  $F(\eta, \omega) = \mathbb{1}_{H_1}(\eta_{t_1}^\eta(\omega))\mathbb{1}_{H_2}(\eta_{t_2}^\eta(\omega))\dots\mathbb{1}_{H_k}(\eta_{t_k}^\eta(\omega))$  est une fonction  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(D_U)$ -mesurable par composée d'applications mesurables :

- $(\eta, \omega) \mapsto \eta^\eta(\omega)$  est mesurable d'après 4.8 ;
- les projections  $\eta \mapsto \eta_t$  sont mesurables sur  $D_X$  d'après 1.22.

Alors la fonction :

$$\begin{aligned} \eta \mapsto \int_{\Omega} F(\eta, \omega) \mathbb{P}(d\omega) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{H_1}(\eta_{t_1}^\eta(\omega))\mathbb{1}_{H_2}(\eta_{t_2}^\eta(\omega))\dots\mathbb{1}_{H_k}(\eta_{t_k}^\eta(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \mathbb{P}^\eta(A) \quad \text{d'après le théorème de Fubini.} \end{aligned}$$

est une fonction mesurable en  $\eta$ .

3. Montrons que  $\mathbb{P}^\eta[\eta_{t+} \in A \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}^{\eta_t}(A)$   $\mathbb{P}^\eta$ -p.s. pour tout  $\eta \in X$  et  $A \in \mathcal{F}$ .

On note  $\eta_{[0,t]}$  la restriction de la fonction  $\eta \in D_X$  à l'intervalle  $[0, t]$  et  $D_X[0, t]$  l'espace des fonctions *cadlag*

sur  $[0, t]$ .

Montrons que

$$\forall B \subseteq D_X[0, t], \quad \mathbb{E}^\eta[\mathbb{1}_A(\eta_{t+})\mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]})] = \mathbb{E}^\eta[\mathbb{P}^{\eta_t}(A)\mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]})]$$

On introduit l'application

$$\begin{aligned} G = X \times \Omega_0 &\longrightarrow D_X \\ (\eta, \omega) &\longmapsto \eta_t^\eta(\omega) \end{aligned}$$

qui construit le processus d'exclusion d'état initial  $\eta$  et dont la famille de processus de Poisson est  $\omega = \{\mathcal{T}_{(x,y)}\}$ .

On note  $\Theta_t$  l'opérateur de translation que l'on va appliquer aux processus de Poisson. Ainsi, si  $\mathcal{T}_{(x,y)}$  à les temps de saut  $0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} < \dots$  et si  $t \in [s_{m-1}, s_m[$  alors  $\Theta_t(\mathcal{T}_{(x,y)})$  a les temps de saut suivants :  $0 < s_{m-t} < s_{m+1-t} < \dots$ . Autrement dit,  $\Theta_t(\omega)$  est obtenu en "réinitialisant" les processus  $\omega$  au temps  $t$ .

D'après les propriétés du processus de Poisson 3.10, on sait que  $\omega_{[0,t]}$  est indépendant de  $\Theta_t(\omega)$ .

On peut donc construire l'évolution  $\eta_{t+}^\eta(\omega)$  à partir de l'état  $\eta_t^\eta$  et du processus  $\Theta_t(\omega)$ . Ainsi,

$$\eta_{t+}^\eta(\omega) = G(\eta_t^\eta, \Theta_t(\omega)).$$

On a donc :

$$\mathbb{E}^\eta[\mathbb{1}_A(\eta_{t+})\mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]})] = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\eta_{t+}^\eta(\omega))\mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]}^\eta(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \quad (1)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(G(\eta_t^\eta(\omega), \Theta_t(\omega))\mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]}^\eta(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \quad (2)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]}^\eta(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(G(\eta_t^\eta(\omega), \Theta_t(\tilde{\omega}))\mathbb{P}(d\tilde{\omega}) \quad (3)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]}^\eta(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(G(\eta_t^\eta(\omega), \tilde{\omega}))\mathbb{P}(d\tilde{\omega}) \quad (4)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]}^\eta(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \times \mathbb{P}^{\eta_t^\eta(\omega)}(A) \quad (5)$$

$$= \mathbb{E}^\eta[\mathbb{1}_B(\eta_{[0,t]})\mathbb{P}^{\eta_t}(A)]. \quad (6)$$

En effet, (3) vient de l'indépendance entre  $\omega_{[0,t]}$  et  $\Theta_t(\omega)$ , on peut alors intégrer séparément par rapport à chaque variable que l'on notera  $\omega$  et  $\tilde{\omega}$  et (4) vient aussi de l'indépendance entre  $\eta_{[0,t]}^\eta(\omega)$  et  $\omega_{[0,t]}$  :  $\Theta_t(\tilde{\omega})$  suit la même loi que  $\tilde{\omega}$ .

Cette dernière égalité achève la preuve. □

### 4.3 Illustration numérique du processus d'exclusion.

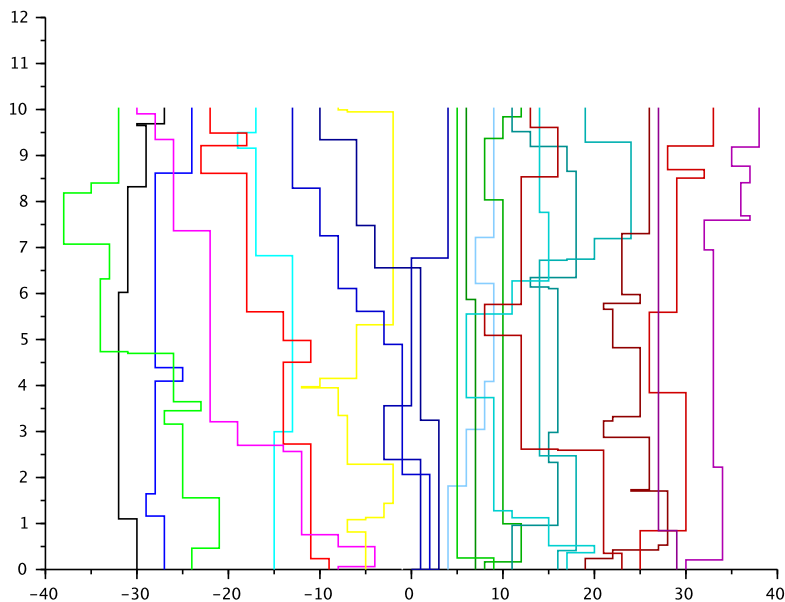
Dans cette section, nous allons illustrer numériquement le processus d'exclusion à l'aide de Scilab.

Code utilisé pour simuler le processus :

```
0001 function [T, P]=exclusion(X, h, lambda)
0002     n=length(X); //X est la configuration initiale des particules.
0003     T=[0]; //T correspond à l'ensemble des temps de saut des particules.
0004     P=[X]; //P désigne les positions des particules.
0005     while T($)<h //on regarde les trajectoires des particules jusqu'au temps h.
0006         t=grand(1,1, 'exp' ,1/(n*lambda)); //les temps de saut de chaque particule suivent une loi
// exponentielle, on introduit donc le minimum des n lois exponentielles: t représente le premier temps de
// saut.
0007         T=[T,T($)+t];
0008         i=ceil(n*rand()); //i désigne la particule qui va sauter au temps t.
0009         y=rand();
0010         u=ceil(5*rand());
0011         if (y<0.5) then //on traite le cas symétrique où les particules ont autant de chance de
// sauter à gauche qu'à droite.
0012             y=X(i)-u;
0013         else y=X(i)+u;
0014         end //on choisit ici le site sur lequel la particule veut sauter.
0015         j=1;
0016         b=0;
0017         while (b==0 & j<n+1)
0018             if X(j)==y then
0019                 b=1;
0020             else j=j+1;
0021             end
0022         end
0023         if b==0 then
0024             X(i)=y;
0025         end //on regarde si le site sur lequel la particule veut sauter est libre; si oui,
// on autorise le saut; si non on ne change pas la configuration.
0026         P=[P,X];
0027     end
0028     for k=1:n do
0029         plot2d2(P(k,:),T); //on trace la trajectoire de chaque particule.
0030     end
0031 endfunction
```

Voici une représentation des trajectoires de plusieurs particules :

$[T, P] = \text{exclusion}([-30; -27; -24; -15; -9; -8; -5; -1; 0; 1; 2; 4; 7; 8; 9; 11; 16; 17; 19; 23; 25; 29; 30], 10, 1)$ .



## Références

- [1] T. SEPPÄLÄINEN - *Translation Invariant Exclusion Processes* (Book in progress),  
Department of Mathematics, University of Wisconsin Madison, 2008.
  
- [2] J. NORRIS - *Markov chains*,  
Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 1997.
  
- [3] P. BILLINGSLEY - *Convergence of Probability Measures*,  
Wiley Series in Probability and Statistics, 1999.
  
- [4] D. FLIPO, M. ROUSSIGNOL - *Files d'attente et fiabilité*,  
Université des Sciences et Technologies de Lille, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées.