Licence 3 de Mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2022-2023

TD 5 : Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

Exercice 1. *Un difféomorphisme global*

On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x + \frac{1}{2}\sin(y), y + \sin(x)). \end{array} \right.$$

1. Soit $v \in \mathbf{R}$. Montrer que $\phi : x \in \mathbf{R} \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(v - \sin(x)) \in \mathbf{R}$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbf{R}$ sur lui-même.
2. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbf{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 2. *Inversion globale et fonctions dilatantes*

Soient $k > 0$ et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ supposée k-dilatante, i.e. :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et d'image fermée.
2. Montrer que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.
3. Conclure.
   Indication : on utilisera la connexité de $\mathbf{R}^n$ qui assure qu'un ouvert-fermé non vide de $\mathbf{R}^n$ est nécessairement $\mathbf{R}^n$ (cf cours de Topologie générale)

Exercice 3. *Perturbation de l'identité*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle qu'il existe $0 < k < 1$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |f'(x)| \leq k.$$

On définit :

$$g : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x + f(y), y + f(x)) \end{array} \right. .$$

Montrer que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$.

Exercice 4. *Fonctions strictement monotones*

Soit E un espace euclidien. Une application $f : E \to E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k\|x - y\|^2.$$

1. Soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si

$$\exists k > 0, \forall x \in E, \forall h \in E, \quad \langle df(x) \cdot h, h \rangle \geq k\|h\|^2.$$

2. Montrer que si $f : E \to E$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, alors c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur E.

Exercice 5. *Racine carrée d'une matrice*

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\|A - \mathrm{I}\| < \alpha$, il existe une unique matrice $\psi(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\psi(A)^2 = A$, avec ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 6. *Réduction des formes quadratiques*

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique inversible. On considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \to \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto M^T A_0 M. \end{array} \right.$$

1. Montrer que $d\varphi(I)$ est surjective et préciser son noyau et sa dimension.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbf{R})$ et une application $\psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ telle que :

$$\forall A \in V, \quad A = \psi(A)^T A_0 \psi(A).$$

Exercice 7. *Une équation différentielle non linéaire*

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R}),\ f(0) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, qu'on munit des normes :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall g \in F,\ \|g\|_F = \|f\|_\infty.$$

On définit alors $T : E \mapsto F$ par :

$$\forall f \in E, Tf = f' + f^2.$$

On a vu dans le TD 4 que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach et que T est $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que pour toute fonction $g \in F$ avec $\|g\|_\infty \leq r_2$, il existe une unique fonction $y \in E$ telle que $\|y\|_E \leq r_1$ et

$$y' + y^2 = g.$$

Exercice 8. *Il n'y a pas de sous-groupes arbitrairement "petits" dans $GL_n(\mathbf{R})$*

1. Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.
2. En déduire qu'il existe un voisinage W de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenu dans W, alors G est trivial.

Exercice 9. *Pour se faire la main sur les fonctions implicites*

Démontrer que la relation :

$$x + y + z + \sin(xyz) = 0,$$

définit z comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de x et y autour du point $(0,0,0)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 10. *Polynômes scindés à racines simples*

Soit $P_0 \in \mathbf{R}_n[X]$ un polynôme admettant n racines réelles distinctes.

1. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbf{R}_n[X]$ de P_0 et des applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : V \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ telles que tout polynôme $P \in V$ admet n racines réelles distinctes $\lambda_1(P) < \ldots < \lambda_n(P)$.
2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $P \in V$, calculer $d\lambda_i(P)$.

Exercice 11. *Asymptotique des racines d'une équation du troisième degré*

Soient $a < b$ deux réels. On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{rl} \mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+ & \to \mathbf{R} \\ (x, \varepsilon) & \mapsto (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3. \end{array} \right.$$

Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x, \varepsilon) = 0$ admet trois racines réelles distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$. Donner un développement asymptotique à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ de ces racines lorsque ε tend vers 0.