"PREMIER"

Legendre / Schwartzentruber p 59 → 66.

Soit $G = (\Sigma, \Gamma, R, S)$ une grammaire algébrique fixée

Idée Dans l'analyse LL1 d'un texte t selon G on cherche à dériver S en t en s'autorisant de regarder 1 lettre pour choisir quelle règle de dériva° on applique. Le non terminal courant X étant fixé il s'agit de choisir parmi les membres droits α des règles $X \to \alpha$. C'est là qu'intervient premier : si t_1 (la 1ère lettre du texte courant) apparait possiblemt comme première lettre d'1 dériva de α (ie si $t_1 \in$ premier(α)) ; alors on peut choisir la règle $X \to \alpha$.

Déf Pour $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$ on définit

$$p'(\alpha) = \{a \in \Sigma \mid \exists \omega \in (\Sigma \cup \Gamma)^* \quad \alpha \to^* \omega \text{ et } \omega_1 = a\}$$

$$\boxed{p(\alpha) = \text{premier}(\alpha) = \begin{cases} p'(\alpha) & \text{si } \alpha \not\to^* \varepsilon \\ p'(\alpha) \cup \{\infty\} & \text{sinon} \end{cases}}$$

où ∞ est un symbole non déjà présent dans $\Sigma \cup \Gamma$.

Moralemt premier(α) est l'ensemble des premières lettres (⚠ pas symbole donc pas variable) de mots dérivant de α, à ceci près qu'on considère que ∞ est la première lettre du mot vide afin de pouvoir distinguer le ~~cas~~ cas du langage vide de celui du langage réduit au mot vide.

ex

$G : S \to S$
$p(S) = \emptyset$

mais

$G : S \to \varepsilon$
$p(S) = \{\infty\}$

ex

$$G : \begin{cases} S \to cTU \\ U \to T \\ T \to \varepsilon \\ T \to S+ \end{cases}$$

$p(cTU) = p(c) = \{c\}$
$p(T) = p(\varepsilon) \cup p(S+) = \{\infty, c\}$.
$p(\varepsilon) = \{\infty\}$
$p(S+) = p(S) = \{c\}$

On considère les propriétés suivantes sur une partie Q de $\underbrace{(\Sigma\cup\Gamma)^* \times \Sigma\cup\{\infty\}}_{:=E}$,
où l'on note $q : \begin{pmatrix} (\Sigma\times\Gamma)^* \to \mathcal{P}(\Sigma\cup\{\infty\}) \\ \omega \mapsto \{s \mid (\omega,s)\in Q\}\end{pmatrix}$

$\star_1$ $\forall a\in\Sigma \ q(a)=\{a\}$

$\star_2$ $q(\varepsilon)=\{\infty\}$

$\star_3$ Si $X\to\alpha\in R$, alors $q(\alpha)\subset q(X)$

$\star_4$ Si $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in(\Sigma\cup\Gamma)^*$ et $\infty\notin q(\alpha_1)$ alors $q(\alpha_1)\subset q(\alpha_1\ldots\alpha_n)$

$\star_5$ ——— et $\infty\in q(\alpha_1)$ alors $q(\alpha_1)_{\setminus\{\infty\}}\cup q(\alpha_2\ldots\alpha_n)\subset q(\alpha_1\ldots\alpha_n)$

$\star = \star_1 \wedge \star_2 \wedge \star_3 \wedge \star_4 \wedge \star_5$.

lemme
- Toutes ces ptés sont stables par intersection
  ie si Q vérifie $\star_i$ et Q' aussi, alors $Q\cap Q'$ vérifie $\star_i$
- L'ensemble total $(\Sigma\cup\Gamma)^*\times\Sigma\cup\{\infty\}$ vérifie $\star$

→ On peut parler de Q_0 la plus petite partie de E vérifiant $\star$

Pté La partie P associée à premier définie comme
$P=\{(\omega,s)\mid \omega\in(\Sigma\cup\Gamma)^*,\ s\in \text{premier}(\omega)\}$ vérifie $\star$

→ $Q_0\subseteq P$

Notez que si l'on définit p à partir de P ci-dessus, on retombe sur la définition de premier qu'on a aussi noté p ci-avant.

$\star_1$: $\{\omega\mid a\to^*\omega\}=\{a\}$ car $a\to^0 a$ et c'est tout car $a\notin\Gamma$.) pour $a\in\Sigma$.
donc $p(a)=\{a\}$, d'où $\star$.

$\star_2$: $\{\omega\mid\varepsilon\to^*\omega\}=\{\omega\mid\varepsilon\to_0\omega\}=\{\varepsilon\}$
donc $p(\varepsilon)=$ "premier lettre de ε" $=\{\infty\}$.

$\star_3$: $\{\omega\mid X\to\omega\}\supset\{\omega\mid X\to\alpha\to\omega\}=\{\omega\mid\alpha\to\omega\}$
d'où $p(X)\supset p(\alpha)$ soit $p(\alpha)\subset p(X)$.

$\star_{4,5}$: D'après le lemme fondamental

$$\{\omega \mid \alpha_1 - \alpha_n \xrightarrow{*} \omega\} = \{\omega_1\omega_2 \mid \alpha_1 \xrightarrow{*} \omega_1 \text{ et } \alpha_2 - \alpha_n \xrightarrow{*} \omega_2\}$$

$$= \underbrace{\{\varepsilon\omega_2 \mid \alpha_1 \xrightarrow{*} \varepsilon, \alpha_2 - \alpha_n \xrightarrow{*} \omega_2\}}_{\emptyset \text{ si } \alpha_1 \not\xrightarrow{*} \varepsilon \text{ ie si } \dashv \notin p(\alpha_1)} \cup \underbrace{\{\omega_1\omega_2 \mid \alpha_1 \xrightarrow{*} \omega_1 \neq \varepsilon, \alpha_2 - \alpha_n \xrightarrow{*} \omega_2\}}_{p(\alpha_1) \setminus \{\dashv\}}$$

Donc si $\dashv \notin p(\alpha_1)$ $p(\alpha_1 - \alpha_n) = p(\alpha_1) \setminus \{\dashv\} = p(\alpha_1)$ soit $\star_4$

si $\dashv \in p(\alpha_1)$ $p(\alpha_1 - \alpha_n) = p(\alpha_2 - \alpha_n) \cup p(\alpha_1) \setminus \{\dashv\}$ soit $\star_5$.

D'où P vérifie $\star$. $\square$ (Le corollaire est immédiat par déf. de la + petite partie vérifiant $\star$)

Pté $P \subseteq Q_0$ **Co** $\boxed{P = Q_0}$

On montre cette inclusion en démontrant par récurrence sur n

$\square_n$: [S'il existe une dérivation LEFTMOST $\alpha \xrightarrow[LM]{n} a\beta$, alors $a \in q_0(\alpha)$
S'il ______ $\alpha \xrightarrow[LM]{n} \varepsilon$, alors $\dashv \in q_0(\alpha)$, et cela permet de conclure.

En effet si $(\omega, c) \in P$ $c \in$ premier(ω).

- Si $c = \dashv$, cela implique que $\omega \to \varepsilon$ donc $\omega \xrightarrow[LM]{} \varepsilon$. d'après $\square_n$ pour n longueur de cette dérivation, on en déduit que $\dashv \in q_0(\omega)$, aut. dit que $(\omega, \dashv) \in Q_0$
- Si $c \in \Sigma$ cela implique l'existence de β tel que $\omega \to c\beta$, d'après $\square_n$ pour n la longueur de cette dériva°, on en déduit que $c \in q_0(\omega)$, aut. dit que $(\omega, c) \in Q_0$.

$\boxed{\square_0}$ Si $\alpha \xrightarrow[LM]{0} a\beta$ néc, $\alpha = a\beta$. Or par $\star$, $a \in q_0(a) = \{a\}$ et puisque $\dashv \notin q_0(a)$ d'après $\star_4$, $q_0(a\beta) \supseteq q_0(a) = \{a\}$. soit $q_0(\alpha) \supseteq \{a\}$
On a bien $\underline{a \in q_0(\alpha)}$.

Si $\alpha \xrightarrow[LM]{0} \varepsilon$ néc. $\alpha = \varepsilon$.

Or par $\star_2$ $q_0(\varepsilon) = \{\dashv\}$ soit $q_0(\alpha) = \{\dashv\}$.

On a bien $\underline{\dashv \in q_0(\alpha)}$

$\boxed{\square_{n+1}}$ On suppose vraie les $\square_k$ pour tout $k \leq n$.

$\boxed{\text{Si } \alpha \xrightarrow[LM]{n+1} a\beta}$ on peut écrire $\alpha \xrightarrow[LM]{1} \gamma \xrightarrow[LM]{n} a\beta$.

En écrivant $\alpha_1 — \alpha_r$ les lettres de α et en appliquant le lemme fondamental on peut décomposer

$$\begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 — \alpha_r \\ m_1 \downarrow LM & m_2 \downarrow LM \\ \gamma^1 & \gamma^2 \\ n_1 \downarrow LM & n_2 \downarrow LM \\ \omega^1 & \omega^2 \end{array}$$

où $\gamma = \gamma^1\gamma^2$; $a\beta = \omega^1\omega^2$
$1 = m_1 + m_2$; $n = n_1 + n_2$.

soit en particulier m_1 ou $m_2 = 0$
$n_1 \leq n$
$n_2 \leq n$.

Rq
- Si $\alpha_1 \in \Sigma$ alors $\gamma^1 = \alpha_1$ donc $q_0(\gamma^1) = q_0(\alpha_1)$ donc $q_0(\gamma^1) \subset q_0(\alpha_1)$
- Sinon, $\alpha_1 \in \Gamma$ auquel cas $(\alpha_1 \to \gamma_1) \in R$ de par $\star_3$ $q_0(\gamma^1) \subset q_0(\alpha_1)$

- Si $\omega_1 \neq \varepsilon$ alors ω_1 s'écrit $a\beta'$, comme $\gamma^1 \xrightarrow{n_1} \omega^1$ on en déduit par $\square_{n_1}$ que $a \in q_0(\gamma^1)$ or par la rq $q_0(\gamma^1) \subset q_0(\alpha_1)$
D'où $a \in q_0(\alpha_1)$ donc $a \in q_0(\alpha_1)_{\setminus\{\sigma\}} \subset q_0(\alpha)$ par $\star_4$ et $\star_5$.
D'où $\underline{a \in q_0(\alpha)}$

- Si $\omega_1 = \varepsilon$ alors $\gamma^1 \xrightarrow{n_1} \varepsilon$ donc par $\square_{n_1}$ on a $\sigma \in q_0(\gamma^1) \underset{Rq}{\subset} q_0(\alpha_1)$
donc par $\star_5$ $q_0(\alpha_2 — \alpha_r) \subset q_0(\alpha)$
or $\alpha_1 \xrightarrow{n+1} \varepsilon$ implique $\alpha_1 \notin \Sigma$, $\alpha_1 \in \Gamma$ donc par déf de la deriva° left most $m_1 = 1$ et $m_2 = 0$, donc $\alpha_2 — \alpha_r = \gamma_2$.
Or $\gamma_2 \xrightarrow{n_2} \omega^2 = a\beta$ et $\square_{n_2}$ assurent que $a \in q_0(\gamma_2)$
D'où $\underline{a \in q(\alpha_2 — \alpha_r) \subset q_0(\alpha)}$.

$\boxed{\text{Si } \alpha \xrightarrow[LM]{n+1} \varepsilon}$ néc $\alpha_1 \in \Gamma$ et par le lemme fondamental on peut décomposer cette dérivation leftmost en

$$\begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 — \alpha_r \\ \downarrow^1 & \downarrow^0 \\ \gamma^1 & \gamma^2 \\ \downarrow^{n_1} & \downarrow^{n_2} \\ \varepsilon & \varepsilon \end{array}$$

où $n_1 + n_2 = n$ soit en part $n_1 \leq n$ et $n_2 \leq n$.
Puisque $\gamma^1 \xrightarrow{n_1} \varepsilon$ on a par $\square_{n_1}$ $\sigma \in q_0(\gamma^1)$
or $(\alpha_1 \to \gamma^1) \in R$ donc par $\star_3$ $q_0(\gamma^1) \subset q_0(\alpha_1)$
donc $\sigma \in q_0(\alpha_1)$ donc par $\star_5$
$q_0(\alpha_2 — \alpha_r) \subset q_0(\alpha)$ or $\alpha_2 — \alpha_r = \gamma^2$
et puisque $\gamma^2 \xrightarrow{n_2} \varepsilon$ par $\square_{n_2}$ on a
$\sigma \in q_0(\gamma_2^2)$ d'où $\underline{\sigma \in q_0(\alpha_2 — \alpha_r) \subset q_0(\alpha)}$

D'où $\square_{n+1}$

Déf On définit par récurrence les fonctions p_n allant de $(\Sigma \cup \Gamma)^*$ vers $\mathcal{P}(\Sigma \cup \{\infty\})$ par

$$p_0(\omega) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } \omega = a \in \Sigma \\ \{\infty\} & \text{si } \omega = \varepsilon \\ \{\infty\} & \text{si } \omega = X \in \Gamma \text{ et } (X \to \varepsilon) \in R \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_{n+1}(\omega) = \begin{cases} p_n(\omega) & \text{si } \omega \in \Sigma \cup \{\infty\} \\ p_n(X) \cup \bigcup_{(X \to \alpha) \in R} p_n(\alpha) & \text{si } \omega = X \in \Gamma \\ p_n(\omega) \cup p_n(\omega_1) & \text{si } \omega = \omega_1 \ldots \omega_n \text{ et } \infty \notin p_n(\omega_1) \\ p_n(\omega) \cup p_n(\omega_1) \setminus \{\infty\} \cup p_n(\omega_2 \ldots \omega_n) & \text{si } \omega = \omega_1 \ldots \omega_n \text{ et } \infty \in p_n(\omega_1) \end{cases}$$

On pose alors $p_* = \omega \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n(\omega)$

Pté $p_* = p$

↳ **Cor** Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour toute partie droite α d'une règle de G, $p_{n_0}(\alpha) = p_{n_0+1}(\alpha)$, ainsi que pour tout sous termes de membres droits, alors on a $p_{n_0}(\alpha) = p(\alpha)$

Preuve (pté) Fort du résultat préc. on sait que $p = q_0$.
On va ici montrer par réc que $\forall n \in \mathbb{N}$ $p_n \leq q_0$ (ie $\forall \omega$ $p_n(\omega) \subset q_0(\omega)$)
on aura alors $p_* \leq q_0$, on conclura par minimalité de Q_0 et donc de q_0.

→ $p_0(a) = \{a\} \underset{*_1}{=} q_0(a)$
→ $p_0(\varepsilon) = \{\infty\} \underset{*_2}{=} q_0(\varepsilon)$
→ $p_0(X) = \{\infty\}$ où $X \to \varepsilon$. Par $*_3$ $q_0(\varepsilon) \subset q_0(X)$ or par $*_2$ $q_0(\varepsilon) = \{\infty\}$
on a donc bien $\{\infty\} \subset q_0(X)$ soit $p_0(X) \subset q_0(X)$
→ $\emptyset \subset q_0(\omega)$ sinon est clair. D'où $p_0 \leq q_0$

Supposons la pté vraie pour p_n.

$\rightarrow p_{n+1}(a) = p_n(a) \underset{HR}{\subset} q_0(a)$

$\rightarrow p_{n+1}(\varnothing) = p_n(\varnothing) \underset{HR}{\subset} q_0(\varnothing)$

$\rightarrow p_{n+1}(X) = \left(p_n(X) \cup \bigcup_{(X\to\alpha)\in R} p_n(\alpha)\right) \underset{HR}{\subset} \left(q_0(X) \cup \underbrace{\bigcup_{(X\to\alpha)} q_0(\alpha)}_{\subset q_0(X) \text{ par } \star_3}\right) \subset q_0(X)$

$\rightarrow p_{n+1}(\omega_1 \text{---} \omega_n) = p_n(\omega_1) \cup p_n(\omega_1 \text{---} \omega_n)$ si $\varnothing \notin p_n(\omega_1)$

$\underset{HR}{\subset} q_0(\omega_1)\setminus\{\varnothing\} \cup q_0(\omega_1 \text{---} \omega_n)$ (l'HR donne $p_n(\omega_1) \subset q_0(\omega_1)$ puis comme $p_n(\omega_1) = p_n(\omega_1)\setminus\{\varnothing\} \subset q_0(\omega_1)\setminus\{\varnothing\}$)

$\subset q_0(\omega_1 \text{---} \omega_n)$ d'après $\star_1$ et $\star_5$.

$\rightarrow p_{n+1}(\omega_1 \text{---} \omega_n) = p_n(\omega_1)\setminus\{\varnothing\} \cup p_n(\omega_2 \text{---} \omega_n) \cup p_n(\omega_1 \text{---} \omega_n)$ si $\varnothing \in p_n(\omega_1)$

$\underset{HR}{\subset} \underbrace{q_0(\omega_1)\setminus\{\varnothing\} \cup q_0(\omega_2 \text{---} \omega_n)}_{= q_0(\omega_1 \text{---} \omega_n)} \cup q_0(\omega_1 \text{---} \omega_n)$ car $\varnothing \in p_n(\omega_1) \underset{HR}{\subset} q_0(\omega_1)$ et d'après $\star_4$

$= q_0(\omega_1 \text{---} \omega_n)$

D'où la propriété vraie au rang $n+1$.

Donc $\forall \omega \in (\Sigma\cup\Gamma)^*$ $p^*(\omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n(\omega) \subset q_0(\omega)$ soit $P^* \subset Q_0$

Montrons maintenant que "p^*" vérifie $\star$

$\rightarrow p^*(a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n(a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a\} = \{a\}$ d'où p^* vérifie $\star_1$

$\rightarrow$ de m̂ $p^*(\varepsilon) = \varnothing$ donc p^* vérifie $\star_2$.

$\rightarrow$ Si $(X\to\alpha) \in R$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(\alpha) \subset p_{n+1}(X)$

donc $p^*(\alpha) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n(\alpha) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_{n+1}(X) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n(X) = p^*(X)$ donc p^* vérifie $\star_3$

$\rightarrow$ Si $(\alpha_1 \text{---} \alpha_n) \in (\Gamma\cup\Sigma)^*$ tel que $\varnothing \notin p^*(\alpha_1)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varnothing \notin p_n(\alpha_1)$ donc $p_n(\alpha_1) \subset p_{n+1}(\alpha_1 \text{---} \alpha_n)$ donc en passant à l'union et sachant que $p_0(\alpha_1 \text{---} \alpha_n) = \emptyset$ on a $p^*(\alpha_1) \subset p^*(\alpha_1 \text{---} \alpha_n)$

soit p^* vérifie $\star_4$

$\rightarrow$ Si $(\alpha_1 - \alpha_n) \in (\Gamma\cup\Sigma)^*$ tel que $\varnothing \in p^*(\alpha_1)$

Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $\varnothing \in p_n(\alpha_1)$ donc $\forall n \geq n_0$ $p_n(\alpha_1)\setminus\{\varnothing\} \cup p_n(\alpha_2 - \alpha_n) \subset p_{n+1}(\alpha)$

or on sait aussi que $\bigcup_{n\leq n_0} p_n(\alpha_1) = p_{n_0}(\alpha_1)$ et que $\bigcup_{n\leq n_0} p_n(\alpha_2 - \alpha_n) \subset p_n(\alpha_2 \text{---} \alpha_n)$

puisque $p_n \nearrow$, donc $\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n(\alpha_1)\setminus\{\varnothing\}}_{p^*(\alpha_1)} \cup \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n(\alpha_2 - \alpha_n)}_{p^*(\alpha_2 - \alpha_n)} \subset \bigcup_{n\geq n_0+1} p_n(\alpha) \subset p^*(\alpha)$

d'où p^* vérifie $\star_5$

Puisque P^* vérifie on a nec $Q_0 \subset P^*$ par minimalité de Q_0, d'où $\boxed{P^* = Q_0 = P}$

ex

$G : S \to Sa$
$S \to \varepsilon$.

	P_0	P_1	P_2	P_3
ε	α	α	α	α
a	a	a	a	a
S	α	α (1)	a, α (3)	a, α (5)
Sa	$\emptyset$	a (2)	a (4)	a (6) ok

(1) $P_1(S) = P_0(S) \cup P_0(Sa) \cup P_0(\varepsilon)$
$= \{\alpha\} \cup \emptyset \cup \{\alpha\}$

(2) $P_1(Sa) = P_0(Sa) \cup P_0(S)_{\setminus\{\alpha\}} \cup P_0(a)$

car $\alpha \in P_0(S)$

$= \emptyset \cup \{\alpha\}_{\setminus\{\alpha\}} \cup \{a\}$
$= \{a\}$

(3) $P_2(S) = P_1(S) \cup P_1(Sa) \cup P_1(\varepsilon)$
$= \{\alpha\} \cup \{a\} \cup \{\alpha\}$
$= \{a, \alpha\}$

(4) $P_2(Sa) = P_1(Sa) \cup P_1(S)_{\setminus\{\alpha\}} \cup P_1(a)$

car $\alpha \in P_1(S)$ $= \{a\} \cup \{a, \alpha\}_{\setminus\{\alpha\}} \cup \{a\}$
$= \{a\}$

(5) $P_3(S) = P_2(S) \cup P_2(Sa) \cup P_2(\varepsilon)$
$= \{a\} \cup \{a, \alpha\} \cup \{a\}$
$= \{a, \alpha\}$

(6) $P_3(Sa) = P_2(Sa) \cup P_2(S)_{\setminus\{\alpha\}} \cup P_2(a)$
$= \{a\} \cup \{a\} \cup \{a\}$
$= \{a\}$

Preuve du corollaire

Pour ω un membre droit de règle de G, ou un sous-terme d'un tel membre on sait que $p_n(\omega)$ est ↗ pour l'inclusion et majorée par $p_*(\omega)$ qui est finie comme partie de $\Sigma \cup \{\alpha\}$, lui m̄ fini. Donc il existe un rang n_ω à partir duquel $p_n(\omega)$ stationne à $p_*(\omega)$.
En prenant $n_0 = \max(n_\omega)$ pour ω l'un des membres droits ou sous-terme de membre droit, on a la pté. De plus on peut prendre ce max car il y a un nombre fini de membres droits, et ils sont tous fini donc ω varie dans un ens. fini.