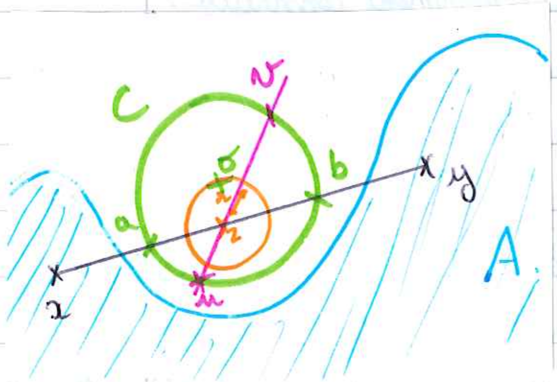
# Théorème de Motzkin

Cf Mathématiques générales pour l'agrégation de Tauvel. $2^{\text{ème}}$ éd. p345

Le théorème de Motzkin donne une réciproque du théorème de projection dans le cadre euclidien puisqu'il ennonce que l'unicité de la projection sur une partie fermée assure sa convexité. Plaçons nous donc dans $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, d'espace vectoriel sous-jacent $E$ et considérons $A$ une partie fermée non vide de $\mathcal{E}$.

104.1 **lemme** Soient $x, y, z$ tels que $(x,y) \in A^2$ et $z \in ]x,y[ \cap A^c$.
Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\overline{\mathcal{B}(z,r)} \subset A^c$.
On note $\mathcal{F} = \{ \overline{\mathcal{B}(o,\rho)} \mid o \in \mathcal{E}, \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \underbrace{\mathcal{B}(o,\rho) \subset A^c}_{*_1} \text{ et } \underbrace{\overline{\mathcal{B}(z,r)} \subset \overline{\mathcal{B}(o,\rho)}}_{*_2} \}$
→ $\mathcal{F}$ admet une boule de rayon maximal
→ si $B \in \mathcal{F}$ est de rayon maximal alors $Fr(A) \cap Fr(B) \neq \emptyset$.

**Preuve** 1) MONTRER QUE LES CENTRES SONT DANS UN COMPACT



On note $\mathcal{C}$, resp $R$, l'ensemble des centres, resp des rayons des boules appartenant à $\mathcal{F}$.
Soit $B = \overline{\mathcal{B}(o,\rho)} \in \mathcal{F}$. On note $C = \mathcal{S}(o,\rho) \cap P(x,y,o)$
Soit $(a,b) \in \mathcal{E}^2$ tels que $B \cap ]x,y[ = [a,b]$.
On choisit $u$ sur $C$ le cercle de $S$ dans le plan de $x, y, o$, et $v$ l'autre point de $C \cap (uz)$.
Puisque $z \in (u,v)$ et $z \in (a,b)$ où $a, b, u, v \in C$ la puissance de $z$ par rapport à $C$ vaut $\langle \vec{za} \mid \vec{zb} \rangle$ et $\langle \vec{zu} \mid \vec{zv} \rangle$.
On en déduit $d(z,b) \times d(z,a) = - \langle \vec{za} \mid \vec{zb} \rangle = - \langle \vec{zu} \mid \vec{zv} \rangle = d(z,u) \times d(z,v)$
Or puisque $z \in [a,b] \subset [x,y]$, $d(z,b) \times d(z,a) \leq d(z,x) \times d(z,y)$.
Donc $d(z,u) \leq \dfrac{d(z,x) \times d(z,y)}{\underbrace{d(z,v)}_{\geq r}} \leq \dfrac{d(z,x) \times d(z,y)}{r} =: M$

Or pour $u$ choisi sur $C \cap (Oz)$, $d(z,o) \leq d(z,u)$ donc $o \in \overline{\mathcal{B}(z,M)}$.
$M$ étant indépendant de $B$ (ie de $\rho$ et $o$) on en déduit $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{B}(z,M)}$.

## B) CONSTRUIRE UNE BOULE DE RAYON MAXIMAL

Considérons $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\overline{\mathcal{B}(\sigma_n, \rho_n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ une suite maximisant le rayon c-à-d telle que $\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup \mathcal{R}$. (Qui à ce stade est encore peut-être $\infty$).

Comme $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{B}(z, M)}$ qui est compact (car on est en dim finie), on peut supposer, quitte à extraire, que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sigma$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n$ satisfait $\star_1$ on a $\forall n\in\mathbb{N}$ $\rho_n \leq d(\sigma_n, A)$ or $\forall n\in\mathbb{N}$ $d(\sigma_n, A) \leq d(\sigma_n, \sigma) + d(\sigma, A) \leq 1 + d(\sigma, A)$ à partir d'1 certain rg.

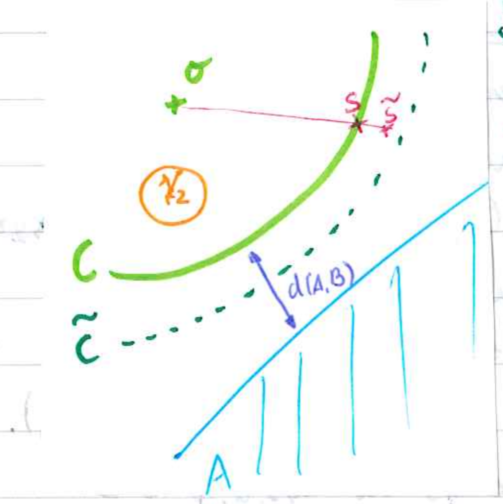
Donc $R$ est fini comme limite d'une suite bornée $((\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}})$.

On peut donc considérer la boule $B = \overline{\mathcal{B}(\sigma, R)}$. Montrons que $B \in \mathcal{F}$.

- Soit $a \in \boxed{A}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $d(\sigma_n, a) \geq \rho_n$ (par $\star_1$). En passant à la limite $d(\sigma, a) \geq R$ ce qui assure $a \notin \mathcal{B}(\sigma, R)$, d'où $B$ vérifie $\star_1$
- Soit $u \in \overline{\mathcal{B}(z, x)}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $d(\sigma_n, u) \leq \rho_n$ (par $\star_2$) $\leq R$. En passant à la limite on a $d(\sigma, u) \leq R$ soit $u \in \overline{\mathcal{B}(\sigma, R)}$. D'où $B$ vérifie $\star_2$.

Ainsi la boule $B$ ici construite est une boule de $\mathcal{F}$ de rayon maximal.

## C) CARACTÉRISER LES ÉLÉMENTS DE $\mathcal{F}$ DE RAYON MAXIMAL.



Soit $B = \overline{\mathcal{B}(\sigma, R)} \in \mathcal{F}$ une boule de rayon maximal. (non nécessairement celle précédemment construite).

Par l'absurde supposons que $A \cap B = \emptyset$. La distance entre une partie fermée $(A)$ et une partie compacte $(B)$ étant atteinte (cf 102.7), cette vacuité implique $d(A, B) > 0$.

On considère alors $\tilde{B} = \overline{\mathcal{B}(\sigma, R + \frac{d(A,B)}{2})}$

- $\overline{\mathcal{B}(z, x)} \subset B \subset \tilde{B}$ donc $\tilde{B}$ vérifie $\star_2$
- Soit $\tilde{s} \in \tilde{B}$. Il existe - quitte à considérer $s = (\sigma\tilde{s}) \cap \mathcal{C}(\sigma, R)$ - $s \in B$ tel que $d(s, \tilde{s}) \leq \frac{d(A,B)}{2}$. Alors $\forall a \in A$ $d(a, \tilde{s}) \geq d(a, s) - d(s, \tilde{s}) \geq d(A,B)\,(1 - \frac{1}{2})$ donc $\forall a \in A$ $d(a, \tilde{s}) > 0$, d'où $\tilde{s} \notin A$ et donc $\tilde{B}$ vérifie à fortiori $\star_1$

↳ il suffit que $\mathrm{int}(\tilde{B}) \subset A^c$ ici on a $\tilde{B} \subset A^c$.

Donc $\tilde{B} \in \mathcal{F}$ or il est de rayon $> R$. IMPOSSIBLE.

Donc $A \cap B \neq \emptyset$; et cette intersection ne peut avoir lieu ni ds $\mathrm{int}(A)$ ni dans $\mathrm{int}(B)$ sinon $\star_1$ serait mis en défaut. D'où nécessairement $Fr(A) \cap Fr(B) \neq \emptyset$

04.1

104.2 **Théorème de Motzkin.**

Si la partie fermée $A$ admet une unique projection pour chaque $x \in E$ alors elle est convexe.

Preuve 1) SE RAMENER AU LEMME

On raisonne par l'absurde. On suppose que $A$ n'est pas convexe ce qui nous donne l'existence de $(x,y) \in A^2$ tel que $]x,y[ \not\subset A$.

Il existe alors $z \in ]x,y[$ tel que $z \notin A$. Or puisque $A$ est fermé, $A^c$ est ouvert, il existe donc $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\underline{\overline{B(z,r)}} \subset A^c$.

On considère à nouveau $\mathcal{F} = \{\overline{B(o,\rho)} \mid o \in E, \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \underbrace{B(o,\rho) \subset A^c}_{*_1}, \underbrace{\overline{B(z,r)} \subset \overline{B(o,\rho)}}_{*_2}\}$

D'après le lemme il existe $\underline{B \in \mathcal{F}}$ de rayon maximal, et alors $B \cap A \neq \emptyset$. On note $c$ le centre de $B$, $R$ son rayon, $S$ son bord.

2) UTILISER L'UNICITÉ DE LA PROJECTION

Soit $u \in B \cap A \subset S \cap A$.

- $u \in S = \mathcal{S}(c,R)$ donc $d(u,c) = R$. $u \in A$, on en déduit $d(c,A) \leq R$.
- D'après $*_1$, $\forall a \in A$, $a \notin \text{int}(B)$ soit $\forall a \in A$ $d(c,A) \geq R$, on en déduit $d(c,A) \geq R$.

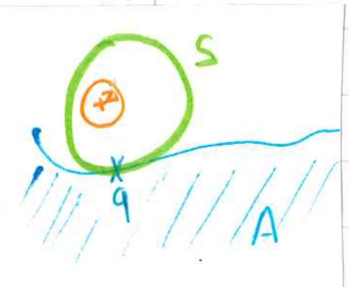
Ainsi par double inégalité $d(c,A) = R$ ce qui fait de $u$ une projection de $c$ sur $A$ puisqu'il est dans $A$ et réalise cet inf.

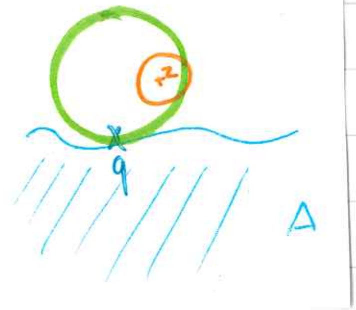
L'unicité de la projection sur $A$ assure alors que $B \cap A$ est réduite à un point, qu'on appelle $\boxed{q}$ (on a m̂ $q \in S \cap Fr(A)$).

3) DISJONCTION DES CAS ET IDÉE.

Se présentent alors 2 cas : CAS 1 → $\underline{\overline{B(z,r)}} \cap \underline{S} = \emptyset$

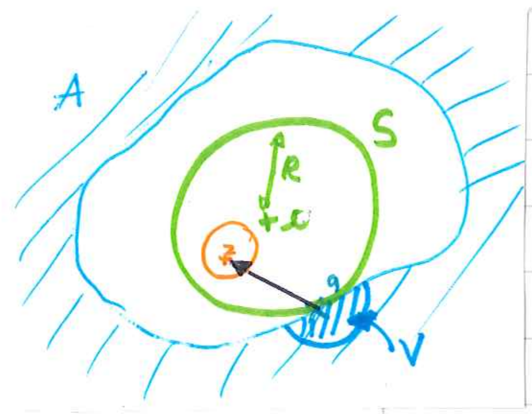
CAS 2 → $\underline{\overline{B(z,r)}} \cap \underline{S} \neq \emptyset$





Dans chacun d'eux la démarche sera la même : on choisit un axe (et un sens) dans lequel on va faire bouger $B$, cela nous donne un voisinage $V$ de $q$ qui sera hors de la boule pour un déplacem^t^ non nul. Considérant $\tilde{A} = A_{\setminus V}$, $\tilde{A}$ ne touche plus la boule $B$. On cherche alors de combien on peut bouger la boule dans la direction fixée pour qu'elle vérifie encore $*_1$ et $*_2$. On aura alors une boule de $\mathcal{F}$ qui n'est pas de rayon max car elle ne touche plus $A$, alors qu'elle est de rayon max comme translatée de $B$ : CONTRADICTION.

## 4) PREMIER CAS



On suppose ici que $\overline{\mathcal{B}(z,r)} \cap S = \emptyset$

### a) Choisir le sens de déplacem^t de B

Ici le déplacement se fera selon $\underline{\vec{qz}}$

Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$ on note alors

$\rightarrow c_t = c + t\vec{qz} \quad B_t = \mathcal{B}(c_t, R) = B + t\vec{qz}$

### b) Trouver le voisinage de q

On introduit $g = \left(\begin{smallmatrix} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \langle \vec{qz} \mid \vec{cu} \rangle \end{smallmatrix}\right)$

On calcule
$$g(q) = \langle \vec{qz} \mid \vec{cq} \rangle = \langle \vec{qc} + \vec{cz} \mid \vec{cq} \rangle = -\|\vec{cq}\|^2 + \langle \vec{cz} \mid \vec{cq} \rangle$$
$$\leq -\|\vec{cq}\|^2 + \|\vec{cz}\| \, \|\vec{cq}\| = -R^2 + d(c,z) * R$$
$$< -R^2 + R^2 = 0 \quad \text{car } z \in \text{int}(B) \text{ donc néc } d(c,z) < R$$

Par continuité de g il existe donc un voisinage ouvert V de q tq $\forall v \in V, \ g(v) < 0$

Alors $\forall v \in V \cap A, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}$
$$d^2(c_t, v) = \| \vec{vc} + \vec{cc_t} \|^2 = \| \vec{vc} + t\vec{qz} \|^2 = \|\vec{vc}\|^2 + \underbrace{t^2\|\vec{qz}\|^2}_{\geq 0} + 2t\langle \vec{vc} \mid \vec{qz} \rangle$$
$$\geq d(c,v)^2 - \underbrace{2t}_{\geq 0}\underbrace{g(v)}_{< 0} > d(c,v)^2 \geqslant R^2 \quad \text{car } v \in A \text{ et } \bigstar_1$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $(A \cap V) \cap \mathcal{B}(c_t, R) = \emptyset$ soit $\underline{(A \cap V) \cap B_t = \emptyset}$.

### c) Determiner $T_1$ tq $\forall t \leq T_1$, $B_t \cap \tilde{A} = \emptyset$

On considère $\tilde{A} = A_{\setminus V}$.

Puisque l'intersection de A et B était réduite à q qui a été enlevé avec V, $\tilde{A}$ et B ne s'intersectent plus.

$\tilde{A}$ étant fermé et B compact, on déduit de $A \cap B = \emptyset$ que $d(\tilde{A}, B) > 0$ (Cf 102.7)

On pose alors $T_1 = \dfrac{d(\tilde{A}, B)}{2\|\vec{qz}\|}$

Ainsi $\forall t \leq T_1$, $\forall u \in B$, $u + t\vec{qz} \notin \tilde{A}$ car $\|t\vec{qz}\| \leq T_1 \|\vec{qz}\| \leq \dfrac{d(\tilde{A}, B)}{2} < d(\tilde{A}, B)$

donc $\underline{\forall t \leq T_1, \ B_t = B + t\vec{qz} \subset \tilde{A}^c}$

### d) Déterminer $T_2$ tq $\forall t \leq T_2$, $\overline{\mathcal{B}(z,r)} \subset B_t$

Par hypothèse $\overline{\mathcal{B}(z,r)} \cap S = \emptyset$, on en déduit puisque S et $\overline{\mathcal{B}(z,r)}$ sont deux compacts, que $d(\overline{\mathcal{B}(z,r)}, S) > 0$ (Cf 102.7).

On pose alors $T_2 = \dfrac{d(\overline{\mathcal{B}(z,r)}, S)}{2\|\vec{qz}\|}$.

Ainsi $\forall t \leq T_2$, $\forall u \in \overline{B(z,r)}$, $u - t\vec{qz} \notin \overset{\overset{B}{\shortparallel}}{\overline{B(0,R)^c}}$ car $\|t\vec{qz}\| \leq d(\overline{B(z,r)}, S)/2$
$= d(\overline{B(z,r)}, B^c)/2$
puisque $\overline{B(z,r)} \subset B$.

donc $\forall t \leq T_1$, $\overline{B(z,r)} - t\vec{qz} \subset B$

donc $\forall t \leq T_1$ $\underline{\overline{B(z,r)} \subset B + t\vec{qz} = B_t}$.

### e) Conclure dans ce cas

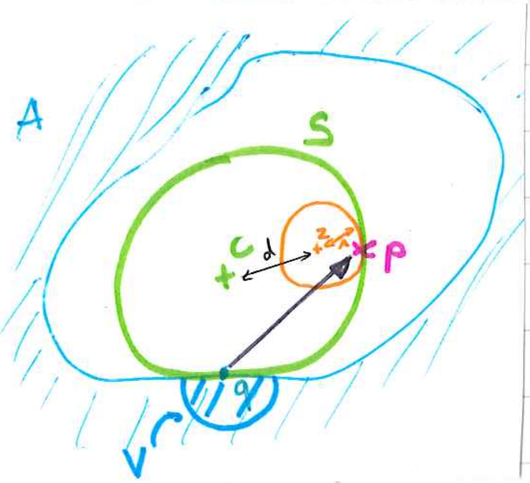
On choisit $t \in \left]0, \min(T_1, T_2)\right]$

Puisque $t > 0$, d'après b) $(A \cap V) \cap B_t = \emptyset$
Puisque $t \leq T_1$, d'après c) $A_{\setminus V} \cap B_t = \emptyset$
$\Big\}$ donc $A \cap B_t = \emptyset$, donc $B_t$ vérifie $\bigstar_1$

Puisque $t \leq T_2$, d'après d) $\overline{B(z,r)} \subset B_t$ donc $B_t$ vérifie $\bigstar_2$

Ainsi $B_t \in \mathcal{F}$, mais puisque $B_t \cap A = \emptyset$, $B_t$ n'est pas de rayon maximal (cf 2ème point du lemme). Or en tant que transla° de B, $B_t$ est de rayon R le rayon maximal. ABSURDE !

## 5) DEUXIÈME CAS



On suppose ici que $\overline{B(z,r)} \cap S \neq \emptyset$

### a) Choisir le sens de translation

- Supposons que $c = z$.

Puisque $\overline{B(z,r)} \subset B(c,R)$ on aura néc $r \leq R$.

Or pour que $\overline{B(z,r)} \cap S = \mathcal{S}(c,R) \neq \emptyset$ on aura $r \geq R$.

Alors $r = R$ et $\overline{B(z,R)} = B$ donc $q \in B \cap A = \overline{B(z,r)} \cap A$.

Impossible (par définition de r). Donc $c \neq z$; alors $d(c,z) > 0$.

On pose $p = z + r\frac{\vec{cz}}{\|cz\|}$. Montrons que $S \cap \overline{B(z,r)}$ est réduite à p.

à passer en 1ère lecture

Soit $s \in S \cap \overline{B(z,r)} = S \cap \mathcal{S}(z,r)$ car l'intersection de $\overline{B(z,r)}$ et S ne peut être intérieure à $B(z,r)$, un voisinage d'un point de l'intersection sortirait de B or $\overline{B(z,r)} \subset B$.

Donc $d(z,s) = r$; alors $R = d(c,s) \leq d(c,z) + d(s,z) = d(c,z) + r$. $(\bullet)$

Puisque $p \in \mathcal{S}(z,r) \subset \overline{B(z,r)} \subset B$, $d(c,p) \leq R$

Or $d(c,p) = \|\vec{cp}\| = \|\vec{cz} + r\frac{\vec{cz}}{\|\vec{cz}\|}\| = (1 + \frac{r}{\|\vec{cz}\|})\|\vec{cz}\| = \|\vec{cz}\| + r \geq R$

Par double inégalité $\underline{R = d(c,z) + r = d + r}$ où $d := d(c,z)$

On a donc un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire $d(c,s) \leq d(c,z) + \underbrace{d(z,s)}_{r}$

Cela donne que c, z, s sont alignés dans cet ordre, donc néc $\underline{s = p}$

$\overline{B(z,r)} \cap S = \{p\}$.

Puisque $p \in \overline{\mathcal{B}(z,r)}$ et $q \in A$ alors que $\overline{\mathcal{B}(z,r)} \cap A = \emptyset$ ; on a mis $\underline{p \neq q}$

On choisit alors comme axe de translation $\overrightarrow{qp}$.

Pour $t \in \mathbb{R}^+$ on notera $c_t = c + t\overrightarrow{qp}$ et $B_t = \mathcal{B}(c_t, R) = B + t\overrightarrow{qp}$.

b) Trouver le voisinage de q.

On introduit $g = \left(\begin{smallmatrix} E & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \langle \overrightarrow{qp} | \overrightarrow{cu} \rangle \end{smallmatrix}\right)$.

inégalité stricte car $\overrightarrow{cp}$ et $\overrightarrow{cq}$ non colinéaire de m sens.

On a alors $g(q) = \langle \overrightarrow{qp} | \overrightarrow{cq} \rangle = \langle \overrightarrow{qc} + \overrightarrow{cp} | \overrightarrow{cq} \rangle = -\|\overrightarrow{cq}\|^2 + \langle \overrightarrow{cp} | \overrightarrow{cq} \rangle < -\underbrace{\|\overrightarrow{cq}\|}_{R}{}^2 + \underbrace{\|\overrightarrow{cq}\|}_{R} \times \underbrace{\|\overrightarrow{cp}\|}_{R}$

Donc $g(q) < 0$, il existe alors, par continuité de g, un voisinage $V$ de q tel que $\forall v \in V,\ g(v) < 0$. Comme en 4) b) $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall v \in A \cap V,\ d^2(c_t, v) > R^2$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $(A \cap V) \cap \mathcal{B}(c_t, R) = \emptyset$ soit $(A \cap V) \cap B_t = \emptyset$

c) Déterminer $T_1$ tq $\forall t \leq T_1,\ B_t \cap \tilde{A} = \emptyset$

On pose à nouveau $\tilde{A} = A \setminus V$ ainsi $d(\tilde{A}, B) > 0$, on pose $T_2 = \dfrac{d(\tilde{A}, B)}{2\|\overrightarrow{qp}\|}$.

Comme en 4) c) cela assure $\forall t \leq T_2$. $\underline{B_t = B + t\overrightarrow{qp} \subset \tilde{A}^c}$.

d) Déterminer $T_2$ tq $\forall t \leq T_2$, $\overline{\mathcal{B}(z,r)} \subset B_t$

On introduit $f = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\, d^2(p,q) - 2g(z) \end{smallmatrix}\right)$. On pose aussi $d = d(z,c)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, d^2(c_t, z) = \|\overrightarrow{zc} + \underbrace{\overrightarrow{cc_t}}_{= t\overrightarrow{qp}}\| = d^2 + t^2\|\overrightarrow{qp}\|^2 + 2t \underbrace{\langle \overrightarrow{zc} | \overrightarrow{qp} \rangle}_{-g(z)} = d^2 + t(f(t))$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $t f(t) = d^2(c_t, z) - d^2$

Comme $c, z, p$ sont alignés dans cet ordre $\overrightarrow{cp} = R \dfrac{\overrightarrow{cz}}{\|\overrightarrow{cz}\|} = R d^{-1} \overrightarrow{cz}$ et $\overrightarrow{cz} = R^{-1} d\, \overrightarrow{cp}$.

$$\text{Alors } g(z) = \langle \overrightarrow{qp} | \overrightarrow{cz} \rangle = \langle \overrightarrow{qc} + \overrightarrow{cp} | \overrightarrow{cz} \rangle = \langle \overrightarrow{qc} | R^{-1} d\, \overrightarrow{cp} \rangle + R^{-1} d \underbrace{\langle \overrightarrow{cp} | \overrightarrow{cp} \rangle}_{= \|\overrightarrow{cp}\|^2 = R^2}$$

$$= -R^{-1} d \underbrace{\langle \overrightarrow{cq} | \overrightarrow{cp} \rangle}_{< R^2} + Rd > -Rd + Rd = 0.$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = t\|\overrightarrow{pq}\|^2 - 2\overbrace{g(z)}^{>0} < t\|\overrightarrow{pq}\|$. En particulier $f(0) < 0$.

Donc il existe $T_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall t \in [-T_1, +T_1]$ $f(t) < 0$ (continuité de f).

Donc $\forall t \in [0, T_1]$ $t f(t) \leq 0$ soit $d^2(c_t, z) \leq d^2$ donc $d(c_t, z) \leq d = R - r$ (cf 5) a))

Donc $\forall u \in \overline{\mathcal{B}(z,r)}$, $d(c_t, u) \leq d(c_t, z) + d(z, u) \leq (R - r) + r = R$ donc $u \in \mathcal{B}(c_t, R) = B_t$.

Donc $\forall t \in [0, T_1]$ $\underline{\overline{\mathcal{B}(z,r)} \subset B_t}$.

e) Conclure dans ce cas

On choisit $t \in ]0, \min(T_2, T_1)]$.

Puisque $t > 0$, d'après b) $(A \cap V) \cap B_t = \emptyset$ } donc $B_t \cap A = \emptyset$ en part. $B_t$ vérifie $*_1$

Puisque $t \leq T_1$, d'après c) $\tilde{A} \cap B_t = \emptyset$ }

Puisque $t \in [0, T_1]$, d'après d) $\overline{\mathcal{B}(z,r)} \subset B_t$ donc $B_t$ vérifie $*_2$

Donc $B_t \in \mathcal{F}$. Même contradiction que ds le 1er cas (cf 4) e)).