Modèle des mesures répétées

Cadre pratique On a mesuré n fois une même quantité et les valeurs de ces mesures sont stockées dans X. On cherche la valeur réelle de cette quantité

25.1 **Modèle** $\boxed{\tilde{X} = \Theta \mathbb{1}}$ $\mathbb{1}$ joue le rôle de A. Θ paramètre $\in \mathbb{R}$

25.2 **Régularité** $\mathbb{1}$ est toujours de rg 1, modèle toujours régulier

25.3 **Moindres carrés** La solution au problème des moindres carrés pour ce modèle est donnée par $\boxed{\hat{\Theta} = moy(X)}$ soit $\boxed{\hat{X} = \bar{X}\mathbb{1}}$

$$\hat{\Theta} = (\mathbb{1}'\mathbb{1})^{-1}\mathbb{1}'X = (n)^{-1}\mathbb{1}'X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 \times X_i}{n} = moy(X).$$

Modèle des mesures répétées sur I populations

Soit $I \in \mathbb{N}^*$. Soit $(n_i)_{i \in [1..I]} \in (\mathbb{N}^*)^I$

25. **Cadre pratique** Sur chacune des I populations on a mesuré n_i fois la même quantité. On a enregistré les valeurs de ces mesures effectives successivement dans X. On cherche alors les valeurs réelles de cette quantités ; une valeur pour chaque population.

Notations Plutôt que $X = (X_i)_{i \in [1..n]}$ où $n = \sum_{i=1}^{I} n_i$ on notera
$X = (X_{i,j})_{i \in [1..I],\, j \in [1..n_i]}$
et $X_i = \begin{pmatrix} X_{i,1} \\ \vdots \\ X_{i,n_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i}$

En outre pour $i \in I$ on notera $\mathbb{1}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \sum_{k=1}^{i-1} n_k \\ \updownarrow n_i \\ \updownarrow \sum_{k=i+1}^{I} n_k \end{array} \Big\updownarrow n$

25.4 **Modèle** $\boxed{\tilde{X} = [\mathbb{1}_1 \dots \mathbb{1}_I]\,\theta}$ $\boxed{\text{où } \theta = (\theta_i)_{i \in [1..I]} \in \mathbb{R}^I}$

25.5 **Régularité** La famille des $(\mathbb{1}_i)_{i \in [1..I]}$ est orthogonale non nulle donc libre, le modèle est toujours régulier.

25.6 **Moindres carrés** La solution au problème des moindres carrés pour ce modèle est donnée par $\boxed{\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \vdots \\ \overline{X_I} \end{pmatrix}}$

Notons $A = [\mathbb{1}_1 \dots \mathbb{1}_I]$. $\tilde{X} = A\theta = (\underbrace{\theta_1 \text{ --- } \theta_1}_{n_1}, \underbrace{\theta_2 \text{ --- } \theta_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{\theta_I \text{ --- } \theta_I}_{n_I})'$

donc $\forall i \in [1..I], \forall j \in [1..n_i]$ $\tilde{X}_{i,j} = \theta_i$ (en notant $\tilde{X}$ comme X pour cette indiçage).

$\|\tilde{X} - X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\tilde{X}_k - X_k)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i} (\tilde{X}_{i,j} - X_{i,j})^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} (\theta_i - X_{i,j})^2$

Donc minimiser $\|\tilde{X} - X\|^2$ revient à minimiser pour chaque $i \in [1..I]$ $\sum_{j=1}^{n_i} (\theta_i - X_{i,j})^2$ c'est à dire à résoudre les moindres carrés pour $\tilde{X}_i = \mathbb{1}\theta_i$ avec comme donnée $X_i = \begin{pmatrix} X_{i,1} \\ \vdots \\ X_{i,n_i} \end{pmatrix}$. Or d'après le modèle des mesures répétées simple on sait qu'alors $\hat{\theta}_i = \text{moy}(X_i)$.