33 **Théorème des fermés emboîtés**

33.1 $\boxed{\text{Soit } (X,d) \text{ un espace métrique. Soit } F \text{ l'ensemble des fermés de } X \quad (X,d) \text{ est complet} \Leftrightarrow \forall (F_n) \in (F_{\setminus\emptyset})^{\mathbb{N}},\ \operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \exists x \in X,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}}$

<u>démonstration</u>

- Si (X,d) est complet.

  Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (F_{\setminus\emptyset})^{\mathbb{N}}$ telle que $\operatorname{diam}(F_n)$ qu'on note $\delta(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$ $F_n \neq \emptyset$ donc il existe $x_n \in F_n$.

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\delta(F_N) \leq \varepsilon$.

  $\forall p \geq q \geq N$, $x_p \in F_p \subset F_N$ et $x_q \in F_q \subset F_N$ car $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$

  donc $\forall p \geq q \geq N$ $d(x_p, x_q) \leq \delta(F_N) \leq \varepsilon$.

  Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Puisque (X,d) est complet il existe $x \in X$ tel que $(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

  Si $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in F_{n_0}$ c-à-d $x \in (F_{n_0})^c$ or $(F_{n_0})^c$ est un ouvert donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \subset (F_{n_0})^c$.

  $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $x_n \in F_n \subset F_{n_0}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$ $d(x, x_n) \geq \varepsilon$. IMPOSSIBLE.

  Donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Soit $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

  $\forall n\in\mathbb{N}$ $x \in F_n$ et $y \in F_n$ donc $d(x,y) \leq \delta(F_n)$.

  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \delta(F_N) \leq \varepsilon$ et $d(x,y) \leq \varepsilon$. D'où $d(x,y) = 0$ soit $x = y$.

  Ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

- Réciproquement. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X,d).

  On pose $\forall n$, $A_n = \{x_p \mid p \geq n\}$. Par déf d'une suite de Cauchy $\delta(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  or $\underbrace{\delta(\bar{A}_n) = \delta(A_n)}_{1}$ donc $(\bar{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés non vide, décroissante et dont les diamètres tendent vers 0. Par hypothèse on a donc l'existence de $x \in X$ tel que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n = \operatorname{adh}(x_n)$, or $\underbrace{\text{pour une suite de Cauchy une valeur d'adhérence est une limite}}_{2}$: $x_n \longrightarrow x$. d'où (X,d) complet.

Cf 1 et 2 au dos.

33.2 **Pté** "2" Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge vers cette dernière.

démo Dans (X,d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $x\in adh(x_n)$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$. Il existe, puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall p\geq q\geq N\ d(x_p,x_q)\leq \varepsilon/2$, et puisque $x\in adh(x_n)$ il existe aussi $M\geq N$ tel que $d(x_M,x)\leq \varepsilon/2$ alors on a

$$\forall p\geq M\quad d(x_p,x)\leq \underbrace{d(x_p,x_M)}_{\leq \varepsilon/2}+\underbrace{d(x_M,x)}_{\leq\varepsilon/2}\leq \varepsilon$$

d'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

33.3 **Pté** "1" Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A\in\mathcal{P}(X)$.

$\delta(A)=\delta(\bar{A})$

démo $A\subset\bar{A}$ donc $\delta(A)=\sup(d(a,b)\,|\,(a,b)\in A^2)\leq \sup(d(a,b)\,|\,(a,b)\in\bar{A}^2)=\delta(\bar{A})$.

Soit $(a,b)\in\bar{A}^2$. Par définition de $\bar{A}$ il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ tels que $a_n\to a$ et $b_n\to b$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N\ d(a_n,a)\leq\varepsilon/2$ et $d(b_n,b)\leq\varepsilon/2$ donc

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, d(a,b)\leq d(a_n,a)+d(a_n,b_n)+d(b_n,b)$.

$\leq \varepsilon/2+\delta(A)+\varepsilon/2$

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, $d(a,b)\leq\varepsilon+\delta(A)$, donc $d(a,b)\leq\delta(A)$ donc

$\cancel{\sup}\{d(a,b)\,|\,(a,b)\in\bar{A}^2\}\leq\delta(A)$ soit $\delta(\bar{A})\leq\delta(A)$

d'où, par double inégalité $\delta(\bar{A})=\delta(A)$