Compacité de l'adhérence d'une partie

35.1 **Pté** Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$

$\bar{A}$ est compacte $\Leftrightarrow$ toute suite de $A^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans X

démonstration

"$\Rightarrow$" • Si $\bar{A}$ est compacte une suite de $A^{\mathbb{N}}$ est à fortiori une suite de $\bar{A}^{\mathbb{N}}$ et admet donc, par définition séquentielle de la compacité, une valeur d'adhe

"$\Leftarrow$" • Si toute suite de $A^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adherence dans X.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{A}^{\mathbb{N}}$.

$\forall n$, $x_n \in \bar{A}$ donc $\forall n, \exists\, y_n \in \mathcal{B}(x_n, 1/_{n+1}) \cap A$.

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ donc il existe $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ st $\nearrow$ telle que $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers $y \in X$

En tant que limite d'une suite d'élement de A, $y \in \bar{A}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

- Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$ $(y_{\varphi(n)}) \in \mathcal{B}(y, \frac{\varepsilon}{2})$.
- Par ailleurs, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$, $1/_{n+1} \leq \varepsilon/2$.

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geq N, \quad d(x_{\varphi(n)}, y) \leq d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) + d(y_{\varphi(n)}, y)$$
$$\leq 1/_{\varphi(n)+1} + \varepsilon/2$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Donc $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in \bar{A}$

D'où $\bar{A}$ est compacte.

35.2 **Pté** Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$

$\bar{A}$ est compacte $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists j \in \mathbb{N}, \exists (a_i)_{i\in[1..j]} \in A^j, A \subset \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{B}(a_i; \varepsilon)$

aut. dit $\bar{A}$ est compacte ssi on peut recouvrir A par un nombre fini de boules, de centre dans A et d'un m rayon, aussi petit soit-il.

démonstration

"⇒" Si $\bar{A}$ est compacte. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

$\bar{A} \subset \bigcup_{x \in \bar{A}} \mathcal{B}(x, \varepsilon/2)$. Par compacité de $\bar{A}$ on peut extraire de ce rec. d'ouvert un sous rec. fini, donc il existe $j \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i \in [1..j]} \in \bar{A}^j$ tel que $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{B}(x_i, \varepsilon/2)$

or $A \subset \bar{A}$ donc $A \subset \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{B}(x_j, \varepsilon/2)$.

$\forall i \in [1..j]$, $x_i \in \bar{A}$ donc il existe $a_i \in \mathcal{B}(x_i, \varepsilon/2) \cap A$.

$\forall i \in [1..j]$, $x \in \mathcal{B}(x_i, \varepsilon/2) \Rightarrow d(x, x_i) \leq \varepsilon/2 \Rightarrow d(x, a_i) \leq d(a_i, x_i) + d(x_i, x) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

donc $\forall i \in [1..j]$ $\mathcal{B}(x_i, \varepsilon/2) \subset \mathcal{B}(a_i, \varepsilon)$ d'où $A \subset \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{B}(x_i, \varepsilon/2) \subset \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{B}(a_i, \varepsilon)$.

donc A est bien re couverte par un nombre fini de boules ouvertes centrées ds A et de rayon ε.

"⇐" Si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \exists (a_j)_{j \in [1..N]} \in A^N$, $A \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{B}(a_j, \varepsilon)$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.

On peut recouvrir A, et donc tous les termes de la suite (x_n), par un nombre fini de boules de rayon 1 et de centre dans A, l'une d'entre elles au moins contient un nombre infini de termes de la suite. Notons la $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(a_0, 1/(1+0))$. On considère alors φ_0 qui extrait de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les termes qui sont dans $\mathcal{B}_0$. On pose $\Phi_0 = \varphi_0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose avoir construit $k+1$ boules $(\mathcal{B}_i)_{i \in [0..k]}$ et $(k+1)$ extractrices $(\varphi_i)_{i \in [1..k]}$ telles que $\forall i \in [0..k]$ $\mathcal{B}_i$ est une boule de centre $\frac{1}{1+i}$

$\cdot \forall i \in [0..k]$ $\Phi_k = \bigcirc_{l=0}^{i} \varphi_l$ et $(x_{\Phi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\bigcap_{l=0}^{i} \mathcal{B}_l\right)^{\mathbb{N}}$

* 1 nbre fini de

On peut recouvrir A par * boules de rayon $\frac{1}{k+2}$ et de centre dans A, l'une d'elles contient nécessairement une infinité de termes de la suite $(x_{\Phi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, on la note $\mathcal{B}_{k+1}$ et on note φ_{k+1} l'extractrice qui extrait de $(x_{\Phi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ les termes contenus dans $\mathcal{B}_{k+1}$.

On pose enfin $\Phi_{k+1} = \Phi_k \circ \varphi_{k+1}$, on a alors $(x_{\Phi_{k+1}(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{k+1} \cap \bigcap_{l=0}^{k} \mathcal{B}_l = \bigcap_{l=0}^{k+1} \mathcal{B}_l$

Ainsi on construit par itération $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N} (x_{\Phi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i\right)^{\mathbb{N}}$

On pose $\psi = \left(\begin{array}{l}\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ k \mapsto \Phi_k(k)\end{array}\right)$, Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tq $p > q$. $\psi(p) = \Phi_p(p) = \Phi_q \circ \underbrace{\varphi_{q+1} \circ \dots \circ \varphi_p}_{\text{composée d'extractrice donc } \nearrow}(p)$

Donc il existe $p' > p$ tq $\psi(p) = \Phi_q(p') > \Phi_q(q)$ car $q < p < p'$ donc $\psi(p) > \psi(q)$.

Ainsi $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{N_0+1} \leq \varepsilon$. $\forall k \geq N_0$ $[1..k] \ni N_0$ donc $x_{\psi(k)} = x_{\Phi_k(k)} \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{N_0}$

Donc $\forall p, q \geq N_0$, $x_{\psi(p)} \in \mathcal{B}_{N_0}$ et $x_{\psi(q)} \in \mathcal{B}_{N_0}$ donc $d(x_{\psi(p)}, x_{\psi(q)}) \leq 2$ rayon$(\mathcal{B}_{N_0}) = \frac{2}{N_0+1} \leq \varepsilon$

Donc $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et puisque X est complet elle converge.

Autrement dit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence. Cela est vrai pour tte suite d'élément de A donc d'après la pté 35.1 $\bar{A}$ est compacte