Théorèmes de Banach...

Soit E un espace de Banach. Soit F un EVN.

41.1 **Théorème de Banach-Steinhaus.**

> Soit $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ indexée par Λ quelconque.
> $\forall x\in E, \exists M_x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \lambda\in\Lambda, \|L_\lambda(x)\|_F \le M_x \Rightarrow \exists M\in\mathbb{R}^{+*}, \forall\lambda\in\Lambda, \|L_\lambda\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le M$

1) CONSTRUIRE UNE SUITE DE FERMÉS DONT L'UNION VAUT E

$\forall\lambda\in\Lambda$ $\varphi_\lambda = \left(\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \|L_\lambda(x)\|_F \end{array}\right)$ est continue en tant que composée de $\| \|$ et L_λ qui le sont.

On pose alors $\forall\lambda\in\Lambda, \forall p\in\mathbb{N}$ $F_{p,\lambda} = \varphi_\lambda^{-1}([0,p]) = \{x\in E, \|L_\lambda(x)\|_F \le p\}$

En tant qu'image réciproque d'un fermé par une applica° continue $F_{p,\lambda}$ est fermé

$\forall p\in\mathbb{N}$, on pose $F_p = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_{p,\lambda}$. c'est aussi un fermé, en tant qu'intersection de fermés.

Par hypothèse $\forall x\in E, \exists M_x\in\mathbb{R}^{+*}, \forall\lambda\in\Lambda, \|L_\lambda(x)\|_F \le M_x$

donc $\forall x\in E, \exists p\in\mathbb{N}, \forall\lambda\in\Lambda, \|L_\lambda(x)\|_F \le p$

soit ——————————— $x\in F_{p,\lambda}$

soit $\forall x\in E, \exists p\in\mathbb{N}, x\in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_{p,\lambda}\right) = F_p$.

donc $\forall x\in E, x\in \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$ soit $E\subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$ or $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p \subset E$

d'où $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p = E$.

2) UTILISER LE THÉOREME DE BAIRE POUR CONCLURE

D'après un corollaire du théorème de Baire (Cf 12.4) une suite de fermés d'un espace complet dont l'union est l'espace entier admet au moins un terme d'intérieur non vide. En appliquant ce résultat aux $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on a l'existence de $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{p_0}\neq\emptyset$. $\mathring{F}_{p_0}$ est donc un ouvert non vide, ainsi il existe $x_0\in \mathring{F}_{p_0}$ et $\alpha_0\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\mathcal{B}(x_0,\alpha_0)\subset \mathring{F}_{p_0} \subset F_{p_0}$. Donc $\forall x\in\mathcal{B}(x_0,\alpha_0), \forall\lambda\in\Lambda, \|L_\lambda(x)\|_F \le p_0$.

Soit $x\in E_{\setminus\{0\}}$. $\frac{x}{\|x\|}\in\mathcal{B}(0,1)$ donc $\frac{\alpha_0}{\|x\|}x\in\mathcal{B}(0,\alpha_0)$ et $\frac{\alpha_0}{\|x\|}x + x_0 \in\mathcal{B}(x_0,\alpha_0)$.

Donc $\forall x\in E_{\setminus\{0\}}, \forall\lambda\in\Lambda, \|L_\lambda(\frac{\alpha_0}{\|x\|}x + x_0)\| \le p_0$ soit $\|\frac{\alpha_0}{\|x\|}L_\lambda(x) + L_\lambda(x_0)\| \le p_0$

Or par inégalité triangulaire $\forall x\in E_{\setminus\{0\}}, \forall\lambda\in\Lambda$ $\frac{\alpha_0}{\|x\|}\|L_\lambda(x)\|_F - \|L_\lambda(x_0)\|_F \le \|\frac{\alpha_0}{\|x\|}L_\lambda(x) + L_\lambda(x_0)\|$

d'où $\forall x\in E_{\setminus\{0\}}, \forall\lambda\in\Lambda, \frac{\alpha_0}{\|x\|}\|L_\lambda(x)\| - \|L_\lambda(x_0)\| \le p_0$ donc $\|L_\lambda(x)\| \le \frac{\ }{\ }(\|L_\lambda(x_0)\| + p_0) \le \frac{\|x\|}{\alpha_0}2p$

donc $\forall\lambda\in\Lambda, \forall x\in E_{\setminus\{0\}}$ $\frac{\|L_\lambda(x)\|}{\|x\|} \le \frac{2p_0}{\alpha_0}$ soit $\forall\lambda\in\Lambda, |||L_\lambda||| \le \frac{2p_0}{\alpha_0}$. CQFD.

Remarque : Le fait d'être simplem^t borné sur la boule unité, ou simplem^t borné sur la sphère unité, suffit comme hypothèse, grâce à la pté ci-dessous.

41.2 **Pté** Sous les mêmes notations, et même sans l'hypothèse E complet

(a) $\forall x \in \mathcal{B}(0,1), \exists M_x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \lambda \in \Lambda, \|L_\lambda(x)\|_F \leq M_x \Rightarrow \forall x \in E, \exists M_x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \lambda \in \Lambda \|L_\lambda(x)\| \leq M$

(b) $\forall x \in \mathcal{S}(0,1)$, ———— $\Rightarrow \forall x \in E$ ————

Si (a). Soit $x \in E \setminus \{0\}$. $\frac{x}{2\|x\|} \in \mathcal{B}(0,1)$ donc il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $\|L_\lambda(\frac{x}{2\|x\|})\| \leq M$.
alors $\forall \lambda \in \Lambda$, $\|L_\lambda(x)\| \leq M \cdot 2\|x\|$. En posant $M_x = M 2\|x\|$ on a bien (c)

Si (b), Soit $x \in E \setminus \{0\}$ $\frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{S}(0,1)$ donc il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $\|L_\lambda(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$
alors $\forall \lambda \in \Lambda$, $\|L_\lambda(x)\| \leq M\|x\|$. En posant $M_x = M\|x\|$ on a bien (c).

41.3 **Cor.** Soit E un espace de Banach. Soit F un EVN.
Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$.
$\forall x \in E, \lim_{n\to+\infty} L_n(x) = L(x) \Rightarrow L \in \mathcal{L}(E,F)$

"la limite simple d'applications linéaire continue est elle même linéaire continue, pourvu que l'espace de départ soit complet".

$\forall (x,y) \in E^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $L_n(x+y) = L_n(x) + L_n(y)$ donc par unicité de la limite $L(x+y) = L(x) + L(y)$.
$\forall (x,\lambda) \in E \times \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n(\lambda x) = \lambda L_n(x)$ ———— $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.
Donc L est linéaire de E dans F.
De plus $\forall x \in E$, $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est donc nécessairem^t bornée.
D'après le théorème de Banach-Steinhaus (41.1), il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M$ soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in \mathcal{S}(0,1)} \|L_n(x)\|_F \leq M$.

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ $\sup_{x\in\mathcal{S}(0,1)} \|L(x)\|_F \leq M$.
D'après 11.1 L est donc continue. d'où $L \in \mathcal{L}(E,F)$.

41.4 **Théorème de Banach.**

> Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$
> u est bijective $\Rightarrow u^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

• Soit $(y_1, y_2) \in F^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $u(x_1) = y_1$, $u(x_2) = y_2$

$u^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = u^{-1}(\lambda u(x_1) + u(x_2)) = u^{-1}(u(\lambda x_1 + x_2)) = \lambda x_1 + x_2 = \lambda u^{-1}(y_1) + u^{-1}(y_2)$

donc u^{-1} est linéaire

• On note $B = \mathcal{B}_{f,E}(0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $nB = \{x = ny \mid y \in B\} = \mathcal{B}_{f_E}(0,n)$

On introduit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\overline{u(nB)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés

$F = u(E) = u(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} u(nB) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{u(nB)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ or $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset F$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset F$ donc, d'après le théorème de Baire (cf corollaire 12.4)

et parce que F est complet, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

Donc il existe $y_0 \in \mathring{F}_{n_0}$ et $\alpha_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\mathcal{B}(y_0, \alpha_0) \subset \mathring{F}_{n_0}$

On a $\mathcal{B}(y_0, \alpha_0) \subset \overline{u(n_0 B)}$

donc $\mathcal{B}(0, \alpha_0) = \mathcal{B}(y_0, \alpha_0) - y_0 \subset \overline{u(n_0 B)} - y_0 = \overline{u(n_0 B) - u(x_0)} = \overline{u(\mathcal{B}(-x_0, n_0))}$

Or $\forall a \in \mathcal{B}(-x_0, n_0)$ $\|a\| = \|a - (-x_0) - x_0\| \leq \|a - (-x_0)\| + \|x_0\| \leq n_0 + \|x_0\|$.

En posant $r_0 = n_0 + \|x_0\|$ on a $\mathcal{B}_F(-x_0, r_0) \subset \mathcal{B}_F(0, r_0)$ donc $\mathcal{B}_F(0, \alpha_0) \subset \overline{u(\mathcal{B}_E(0, r_0))}$

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\mathcal{B}_F(0, 1/2^p) = \frac{1}{2^p \alpha_0} \mathcal{B}_F(0, \alpha_0) \subset \frac{1}{2^p \alpha_0} \overline{u(\mathcal{B}_E(0, r_0))} = \overline{\frac{1}{2^p \alpha_0} u(\mathcal{B}_E(0, r_0))} = \overline{u\left(\frac{1}{2^p \alpha_0} \mathcal{B}_E(0, r_0)\right)}$

donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $\mathcal{B}_F(0, 1/2^p) \subset \overline{u(\mathcal{B}_E(0, \underbrace{\boxed{\tfrac{r_0}{\alpha_0}}}_{M} 2^{-p})}$ (R_p)

Soit $y \in \mathcal{B}_F(0,1)$. On note $b_0 = y$.

D'après (R_0) $b_0 = y \in \overline{u(\mathcal{B}_E(0, M))}$. Donc $\mathcal{B}(y, 1/2) \cap u(\mathcal{B}_E(0, M)) \neq \emptyset$.

Il existe donc $a_0 \in \mathcal{B}_E(0, M)$ tel que $u(a_0) \in \mathcal{B}(y, 1/2)$. Ainsi $u(a_0) - y \in \mathcal{B}(0, 1/2)$

donc $b_1 = y - u(a_0) \in \mathcal{B}(0, 1/2)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $b_p \in \mathcal{B}(0, 1/2^p)$ d'après (R_p) $b_p \in \overline{u(\mathcal{B}_E(0, M 2^{-p})}$ donc il existe

$a_p \in \mathcal{B}(0, 2^{-p} M)$ tel que $u(a_p) \in \mathcal{B}(b_p, 2^{-(p+1)})$. Ainsi $u(a_p) - b_p \in \mathcal{B}(0, 1/2^{p+1})$ et en

posant $b_{p+1} = b_p - u(a_p) = y - \sum_{k=0}^{n} u(a_k)$ on a $b_{p+1} \in \mathcal{B}(0, 1/2^{p+1})$.

On peut donc, par itération construire $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tel que $\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N} \ \|a_p\| \leq M \times 2^{-p} \\ \forall p \in \mathbb{N} \ \|y - \sum_{k=0}^{p} u(a_p)\| \leq 2^{-(p+1)} \end{cases}$

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\|a_p\| \leq M 2^{-p}$ donc $\forall N \in \mathbb{N}$ $\tilde{S}_N = \sum_{n=0}^{N} \|a_n\| \leq M \sum_{n=0}^{N} 2^{-n}$ qui converge

donc $(\tilde{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, et est donc nécessairement de Cauchy.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq N \geq N_0 \; \tilde{S}_p - \tilde{S}_N \leq \varepsilon$.

En notant pour tout $N \in \mathbb{N}$ $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ on a alors

$\forall p \geq N \geq N_0 \; \|S_p - S_N\| = \|\sum_{n=N+1}^{p} a_n\| \leq \sum_{n=N+1}^{p} \|a_n\| = \tilde{S}_p - \tilde{S}_N \leq \varepsilon$

Donc $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, par complétude de E elle converge donc vers $a \in E$ et puisque $\forall N \in \mathbb{N} \; \|S_N\| \leq \tilde{S}_N$ on a $\|a\| \leq \tilde{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^n} \leq 2M$.

De plus par continuité de u on a $u(a) = u(\lim_{p\to+\infty} S_p) = \lim_{p\to+\infty} u(S_p)$.

Or $\forall p \in \mathbb{N}^* \; b_{p+1} = y - \sum_{k=0}^{p} u(a_p) = y - u(\sum_{k=0}^{p} a_p) = y - u(S_p) \in \mathcal{B}(0, \frac{1}{2^{p+1}})$

donc $u(S_p)$ converge vers y. Donc $u(a) = \lim_{p\to+\infty}(u(S_p)) = y$. Soit $u^{-1}(y) = a$ et $\|a\| = \|u^{-1}(y)\| \leq 2M$ où M est indépendant de y.

Pour résumer u^{-1} est linéaire et bornée sur la boule unité. D'après 11) on en déduit qu'elle est bien continue.