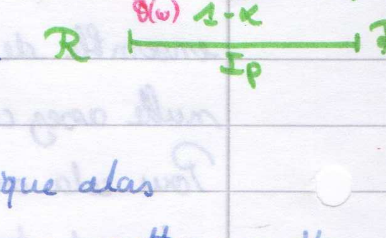
De manière duale il existe β = l'erreur de deuxième espèce.
C'est la probabilité de ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse
$\mathbb{P}(\hat{\theta}(X) \in I_p \mid X \not\sim \mathcal{L}(\theta_0)) = \beta$.
On appelle puissance du test la valeur $1-\beta$, c'est la probabilité de bien rejeter l'hypothèse si elle est fausse $\mathbb{P}(\hat{\theta}(X) \in R = I_p^c \mid X \not\sim \mathcal{L}(\theta_0)) = 1-\beta$.
⚠ Les mesures $(\alpha, \beta, 1-\alpha, 1-\beta)$ sont directement liées à l'intervalle de pari choisi.

Supposons maintenant qu'on ait $X(\omega)$ une réalisation de l'échantillon à étudier.

1) On avait déjà fixé I_p. Si $\hat{\theta}(X(\omega)) \in I_p$ alors on ne rejette pas H_0
Si $\hat{\theta}(X(\omega)) \notin I_p$ alors on rejette H_0

2) On se demande à quel point il faut que le test soit tolérant pour ne pas rejeter H_0. Plus exactement on cherche le plus petit intervalle permettant de ne pas rejeter H_0, ce qui correspond à une erreur de première espèce maximale.



Si on considère des intervalles de pari centrés en θ_0, alors cette erreur de première espèce maximale, appelée p-value vérifie
$\mathbb{P}(|\hat{\theta}(X)-\theta_0| \leq |\hat{\theta}(X(\omega))-\theta_0| \mid X \sim \mathcal{L}(\theta_0)) = 1 - pv(\omega)$.
⚠ La p-value est une variable aléatoire.
Pour faire un test avec un niveau α on applique alors
Si $pv(\omega) \geq \alpha$ $(1-pv(\omega) \leq 1-\alpha$ donc $\hat{\theta}(X(\omega)) \in I_p)$: on ne rejette pas H_0
Si $pv(\omega) < \alpha$ $(1-pv(\omega) > 1-\alpha$ donc $\hat{\theta}(X(\omega)) \in R)$: on rejette H_0.

Test statistique (avec intervalles de pari)

On se place dans le cas où on veut tester un paramètre θ inconnu d'une loi $\mathcal{L}(\theta)$, sachant que certaines variables aléatoires suivent cette loi.

On avance une hypothèse sur la valeur de ce paramètre, on l'appelle l'hypothèse nulle : $H_0 =$ " $\theta = \theta_0$ ".

Pour confronter cette hypothèse à la réalité on utilisera une réalisation d'un échantillon de variables suivant cette loi. Notons X cet échantillon, les X_i sont alors iid $X_i \sim \mathcal{L}(\theta)$. Le but est de se faire une idée du paramètre à partir des valeurs prises par X, pour cela on utilise un estimateur $\widehat{\theta}$ (qui est donc une VA)

$$\underbrace{\hat{\theta} : X(\omega)}_{\text{échantillon de } \mathcal{L}(\theta)} \longmapsto \underbrace{\hat{\theta}(\omega)}_{\text{estimation du paramètre } \theta}$$

On veut maintenant, et A PRIORI (avant de connaître $X(\omega)$) déterminer un ensemble de valeurs possibles de $\hat{\theta}(\omega)$ pour lesquelles on trouve l'hypothèse nulle assez cohérente.

Pour cela on suppose H_0 vraie et on se demande combien de chances on a alors de tomber près / très près / très très près ... de θ_0 avec $\hat{\theta}$. On construit ainsi un intervalle de pari I_p autour de la valeur θ_0. Cet intervalle ne dépend pas de ω, il est déterministe (⚠ $\neq I_{confiance}$).

$$\underset{\text{sur les } \omega \text{ possibles.}}{\mathbb{P}}(\hat{\theta}(X) \in I_p \mid \underbrace{X \sim \mathcal{L}(\theta_0)}_{\text{on suppose } H_0 \text{ vraie}}) = 1 - \alpha$$

$\alpha \in [0,1]$ détermine la tolérence de notre test, ou plutôt celle de notre intervalle de pari. En fait c'est la probabilité de rejeter à tort H_0 puisque $\mathbb{P}(\hat{\theta}(X) \in I_p^c = R \mid X \sim \mathcal{L}(\theta_0)) = \alpha$. On l'appelle erreur de $1^{\text{ère}}$ espèce.

Si $\hat{\theta}(X(\omega)) \notin I_p$
$\hat{\theta}(X(\omega)) \in$ zone de rejet
on rejette H_0

même si en réalité X suivait $\mathcal{L}(\theta_0)$