Cauchy-Lipschitz linéaire

Pté Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in \mathring{I}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Soit $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$.
Il existe une unique fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t) = A(t)[x(t)] \end{cases}$

De plus si A est constante, c'est à dire si on a affaire à une équation autonome, la solution est $x = t \mapsto \exp((t-t_0)A)(x_0)$

Démonstration

1) INTRODUIRE E_λ, $\| \|_{E_\lambda}$ ESPACE DE BANACH.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\Phi_\lambda = \begin{pmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lambda \left| \int_{t_0}^t \|A(u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} du \right| \end{pmatrix}$

On pose alors $E_\lambda = \left\{ x \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \begin{pmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \exp(-\Phi_\lambda(t))\, x(t) \end{pmatrix} \text{ est bornée} \right\}$

On vérifie que $\| \|_{E_\lambda} = \begin{pmatrix} E_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto \sup_{t \in I} \|\exp(-\Phi_\lambda(t))\, x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}$ est une norme sur E_λ

Puisque $\Psi_\lambda = \begin{pmatrix} E_\lambda \longmapsto \mathcal{C}_b(I, \mathbb{R}^n) \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \exp(-\Phi_\lambda(t))\, x(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ est bijective et isométrique,
on déduit de la complétude de $\mathcal{C}_B(I, \mathbb{R}^n)$ celle de E_λ :
Donc $(E_\lambda, \|E_\lambda\|_{E_\lambda})$ est un espace de Banach.

2) INTRODUIRE $\mathcal{A}$ LINÉAIRE DE E_λ DANS E_λ.

On pose $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} E_\lambda \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n) \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \int_{t_0}^t A(u)[x(u)]\, du \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

On va montrer, en majorant le $\sup_{t \in I} \mathcal{A}x(t) e^{-\Phi_\lambda(t)}$ pour x quelconque dans E_λ, que $\mathcal{A}x$ est bien dans E_λ, que $\mathcal{A}$ est continue et puisqu'il est clair, par linéarité de $A(t)$ et de l'intégrale que $\mathcal{A}$ est linéaire, on aura $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E_\lambda)$.
En choisissant λ particulier, on pourra imposer $\|\mathcal{A}\|_{E_\lambda} < 1$ et d'après l'... $Id - \mathcal{A}$ sera inversible. En quoi ça nous intéresse? :

$\forall x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ $\left.\begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \forall t,\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(t')[x(t')]\, dt'$
$\Leftrightarrow \forall t,\ x(t) = x_0 + \mathcal{A}(x)(t)$
$\Leftrightarrow x = t \mapsto x_0 + \mathcal{A}(x)$
$\Leftrightarrow (Id - \mathcal{A})(x) = t \mapsto x_0 \quad \Leftrightarrow x = (Id - \mathcal{A})^{-1} \underbrace{(t \mapsto x_0)}_{\in E_\lambda}.$

3) MAJORER "$\|\mathcal{A}x\|_{E_\lambda}$"

Soit $x \in E_\lambda$. On ne sait pas encore si $\mathcal{A}x \in E_\lambda$, on ne peut donc pas écrire $\|\mathcal{A}x\|_{E_\lambda}$ mais l'idée est de majorer $\sup_{t\in I} \|\exp(-\Phi_\lambda(t))\,\mathcal{A}x(t)\|_{\mathbb{R}^n} := B$ pour montrer au moins que c'est fini.

$$B = \sup_{t\in I} \left\| \exp\left(-\lambda\left|\int_{t_0}^{t} \|A(u)\|\,du\right|\right) \int_{t_0}^{t} A(v)\,[x(v)]\,dv \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \sup_{t\in I} \exp\left(-\lambda\left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)\|\,du\right|\right) \left|\int_{t_0}^{t} \|A(v)\,[x(v)]\|_{\mathbb{R}^n}\,dv\right|$$

$$= \sup_{t\in I} \left|\int_{t_0}^{t} \exp\Big(-\lambda \underbrace{\left|\int_{t_0}^{v}\|A(u)\|du + \int_{v}^{t}\|A(u)\|du\right|}_{\left|\int_{t_0}^{v}\|A(u)\|du\right| + \left|\int_{v}^{t}\|A(u)\|du\right|\ (*)}\Big)\ \underbrace{\|A(v)\,[x(v)]\|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq \|A(v)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}\,\|x(v)\|_{\mathbb{R}^n}}\,dv\right|$$

$$\leq \sup_{t\in I} \left|\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\lambda\left|\int_{t_0}^{v}\|A(u)\|du\right|\right) \exp\left(-\lambda\left|\int_{v}^{t}\|A(u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}du\right|\right) \|A(v)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}\,\|x(v)\|_{\mathbb{R}^n}\,dv\right|$$

En notant $f = \left(\begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \lambda\|A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \end{array}\right)$ on obtient :

$$B \leq \sup_{t\in I} \left|\int_{t_0}^{t} \underbrace{\|x(v)\|_{\mathbb{R}^n} \exp(-\Phi_\lambda(v))}_{\leq \|x\|_{E_\lambda}}\ \frac{1}{\lambda} f(v)\ \exp\left(-\left|\int_{v}^{t} f(u)\,du\right|\right) dv\right|$$

$$\leq \frac{\|x\|_{E_\lambda}}{\lambda} \underbrace{\sup_{t\in I} \left|\int_{t_0}^{t} f(v) \exp\left(-\left|\int_{v}^{t} f(u)\,du\right|\right) dv\right|}_{C}$$

Si $t \leq t_0$ $\quad C = \int_{t}^{t_0} f(v) \exp\left(-\left|\int_{v}^{t} f(u)\,du\right|\right) dv \qquad$ or $v \in [t, t_0]$ donc $v \geq t$

$$= \int_{t}^{t_0} f(v) \exp\left(-\int_{t}^{v} f(u)\,du\right) dv$$

$$= -\int_{t}^{t_0} -f(v) \exp\left(\int_{t}^{v} -f(u)\,du\right) dv$$

$$= -\left[\exp\left(\int_{t}^{v} -f(u)\,du\right)\right]_{v=t}^{v=t_0} = \underbrace{\exp(0)}_{=1} - \underbrace{\exp\left(-\int_{t}^{t_0} f(u)\,du\right)}_{\geq 0}$$

$$\leq 1.$$

Si $t \geq t_0$ $\quad C = \int_{t_0}^{t} f(v) \exp\left(-\left|\int_{v}^{t} f(u)\,du\right|\right) dv \qquad$ or $v \leq t$

$$= \int_{t_0}^{t} f(v) \exp\left(\int_{t}^{v} f(u)\,du\right) = \left[\exp\left(\int_{t}^{v} f(u)\,du\right)\right]_{v=t_0}^{t}$$

$$= \exp(0) - \exp\Big(\underbrace{\int_{t}^{t_0} f(u)\,du}_{\leq 0 \text{ car } f^+ \text{ et } t \geq t_0}\Big)$$

$$\leq 1$$

(*) ici l'inégalité triangulaire serait dans le mauvais sens à cause du $-\lambda$.
On utilise le fait qu'ici les valeurs absolues correspondent seulem^t à une disjonction de cas : - si $t_0 \leq t$ on intègre entre t_0 et t ou entre t_0 et v puis entre v et t
- si $t \leq t_0$ on intègre entre t et t_0 ou entre t et t_0 puis entre t et v.

4) CONCLURE SUR $\mathcal{A}$.

Donc on a $C \leq 1$ et finalement $B \leq \frac{\|x\|_{E_\lambda}}{\lambda}$.

B étant fini, on en déduit que $\mathcal{A}x \in E_\lambda$, puisque c'est vrai $\forall x \in E_\lambda$

$\mathcal{A}$ est bien linéaire de E_λ dans E_λ, et alors $B = \|\mathcal{A}x\|_{E_\lambda}$.

On a alors $\|\mathcal{A}x\|_{E_\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|_{E_\lambda}$ donc $\mathcal{A}$ est continue en 0_{E_λ},

donc $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E_\lambda)$ et $\|\mathcal{A}\|_{E_\lambda} = \sup_{x \in E_\lambda} \frac{\|\mathcal{A}x\|_{E_\lambda}}{\|x\|_{E_\lambda}} \leq \frac{1}{\lambda}$.

On a fixé λ arbitrairement dans $\mathbb{R}^{+*}$, on peut l'imposer >1,

alors $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E_\lambda)$ avec $\|\mathcal{A}\|_{E_\lambda} < 1$.

5) CONCLURE

$\|\mathcal{A}\|_{E_\lambda} < 1$ et $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E_\lambda)$ où E_λ est un espace de Banach donc

$(Id - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}^n$ et $x = (Id - \mathcal{A})^{-1}(t \mapsto x_0)$ est solution.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}^n (t \mapsto x_0)$$

6) EXPLICITER LA SOLUTION DANS LE CAS AUTONOME

Le cas autonome correspond au cas où "A ne dépend pas de t".

C'est à dire $\forall t \in I,\ A(t) = \tilde{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. (Par abus on la note souvent A, identifiant ainsi un elm^t de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et une f^c cst de I ds $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$)

On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ \mathcal{A}^k(u \mapsto x_0)(t) = \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k(x_0)$

. $\forall t \in I\ \mathcal{A}^0(u \mapsto x_0)(t) = (u \mapsto x_0)(t) = x_0 = \frac{1}{1} id(x_0) = \frac{(t-t_0)^0}{0!} A^0(x_0)$

donc la propriété est vraie au rang 0.

. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n.

$\forall t \in I\ \mathcal{A}^{n+1}(u \mapsto x_0)(t) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^n(u \mapsto x_0))(t) = \mathcal{A}\left(u \mapsto \frac{(u-t_0)^n}{n!} A^n(x_0)\right)(t)$

$$= \int_{t_0}^{t} A\left(\frac{(u-t_0)^n}{n!} A^n(x_0)\right) du = \int_{t_0}^{t} \frac{(u-t_0)^n}{n!} A^{n+1}(x_0)\, du$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (u-t_0)^n du\, A^{n+1}(x_0) = \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)\, n!} A^{n+1}(x_0)$$

On a donc la propriété au rang $n+1$.

Donc par réc. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I\ \mathcal{A}^k(u \mapsto x_0)(t) = \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n(x_0)$

donc $\forall t \in I\ \ x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}^n(u \mapsto x_0)(t)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n(x_0)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((t-t_0)A)^n}{n!}(x_0) = \exp((t-t_0)A)(x_0).$$