Cauchy-Lipschitz général

45.1 **Déf** Soient E, F, G trois EVN. Soit $F \in \mathcal{F}(E \times F, G)$.

F est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable (uniformé[ment]
par rapport à la première)

$\Leftrightarrow \forall (a,b) \in E\times F, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists k \in \mathbb{R}^{+*}, \forall a' \in \mathcal{B}_E(a,\alpha)\ F(a',\cdot)$ est k-lpz sur $\mathcal{B}_F(b,\alpha)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (a,b) \in E\times F, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists k \in \mathbb{R}^{+*}, \forall a' \in \mathcal{B}_E(a,\alpha), \forall (b',b'') \in \mathcal{B}_F(b,\alpha) \\ \|F(a',b') - F(a',b'')\|_G \leq k \,\|(a',b') - (a',b'')\|_{E\times F} \end{array} \right.$$

45.2 En particulier si U est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $F \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$

F est localement lipschitzienne par rapport à sa $2^{\text{ème}}$ variable (unif. par rapp[ort]
à la $1^{\text{ère}}$) $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (t_0,x_0) \in U, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}\ \exists k \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha], \\ \forall (x,x') \in \mathcal{B}^2_{\mathbb{R}^n}(x_0,\alpha)\quad \|F(t,x) - F(t,x')\|_{\mathbb{R}^n} \leq k\,\|x-x'\| \end{array} \right.$

Rq le "uniformément par rapport à la première variable", qu'on omettra souvent, signifie que le k est indépendant du t.

45.3 **Théorème de Cauchy-Lipschitz**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Soit $F \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$.
Si F est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable (uniformément par rapport à la première)
alors $\forall (x_0, t_0) \in U, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists ! x \in \mathcal{C}^1([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \mathbb{R}^n)$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]\quad (t, x(t)) \in U & (1) \\ \dfrac{dx}{dt} = t \mapsto F(t, x(t)) & (2) \\ x(t_0) = x_0 & (3) \end{array} \right.$$

Remarque On va démontrer une version du théorème où les hypothèses sont moins fortes : c'est à dire qu'on fixe d'abord $(x_0, t_0) \in U$, et s'il existe un voisinage autour de (t_0, x_0) sur lequel F est continue et si F est lpz par rapport à sa $2^{\text{ème}}$ var (unif / $1^{\text{ère}}$) localement autour de (t_0, x_0) on a alors l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\exists ! x \in \mathcal{C}^1([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \mathbb{R}^n)$ vérifiant (1), (2) e[t (3)]

Démonstration

Soit $(t_0, x_0) \in U$.

On suppose que (a) F est continue au voisinage V de (t_0, x_0) où $V \subset U$

(b) F est lipschitzienne par rapport à sa $2^{\text{ème}}$ variable, uniformément par rapport à la première, au voisinage de (t_0, x_0).

L'idée générale de la démonstration est de MQ la solution est le point fixe de $x \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', x(t'))\, dt'\right)$ où x appartient à un ensemble de fonctions C^1 sur un ensemble de départ à définir autour de t_0.

1) Dans un premier temps nous chercherons à nous restreindre à un ensemble de fonctions X pour lequel l'application $\mathcal{F}$ a un sens.

2) Dans un second temps nous montrerons que X est un espace de Banach pour une norme n_λ (paramétrée par λ).

3) Ensuite nous verrons comment choisir λ pour que $\mathcal{F}$ soit contractante.

4) Enfin nous conclurons à l'aide du théorème du point fixe de Picard.

1) MAJORATIONS ET DÉFINITION DE $\mathcal{F}$

Pour $(\alpha, r) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ on note $M(\alpha, r) = \sup\{\|F(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \mid t \in \mathcal{B}(t_0, \alpha), x \in \mathcal{B}(x_0, r)\}$

D'après (a) il existe $(\alpha_1, r_1) \in \mathbb{R}^{+*2}$ tels que

$\rightarrow \mathcal{B}(t_0, \alpha_1) \times \mathcal{B}(x_0, r_1)$ est contenu dans le voisinage V où F est continue

$\rightarrow \forall (t,x) \in \mathcal{B}(t_0, \alpha_1) \times \mathcal{B}(x_0, r_1)$, $\|F(t,x) - F(t_0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1$

donc ———————, $\|F(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1 + \|F(t_0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n}$

donc $M(\alpha_1, r_1) \leq 1 + \|F(t_0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$.

D'après (b) il existe $(\alpha_2, r_2) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$\rightarrow \forall t \in \mathcal{B}(t_0, \alpha_2)$, $\forall (x, x') \in \mathcal{B}(x_0, r_2)^2$ $\|F(t,x) - F(t,x')\|_{\mathbb{R}^n} \leq k\|x - x'\|_{\mathbb{R}^n}$

On pose $\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ et $r_0 = \min(r_1, r_2)$.

Soit $r \in]0, r_0]$. $\dfrac{r}{2M(\alpha_0, r_0)} > 0$ donc il existe $\alpha \in \left]0, \dfrac{r}{2M(\alpha_0, r_0)}\right] \cap]0, \alpha_0]$

Ainsi $\alpha M(\alpha, r) \leq \alpha M(\alpha_0, r_0) \leq \dfrac{r}{2\cancel{M(\alpha_0, r_0)}} \times \cancel{M(\alpha_0, r_0)} = \dfrac{r}{2}$.

car on fait le sup sur 1 ens + large

Notons $I_\alpha = [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. On définit $X = \mathcal{C}^0(I_\alpha, \mathcal{B}_f(x_0, r/2))$.

$\forall x \in X, \forall t \in I_\alpha \quad \left\|\int_{t_0}^t F(t', x(t'))\,dt'\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left|\int_{t_0}^t \|F(t', x(t'))\|_{\mathbb{R}^n}\,dt'\right|$

or $\forall t' \in [t_0, t]$, $t' \in \mathcal{B}(t_0, \alpha)$ et $x(t') \in \mathcal{B}_f(x_0, r/2) \subset \mathcal{B}(x_0, r)$ (car $x \in X$) donc $\|F(t', x(t'))\|_{\mathbb{R}^n} \leq M$

$$\begin{aligned}
\text{donc } \left\|\int_{t_0}^t F(t', x(t'))\,dt'\right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq M(\alpha, r) \left|\int_{t_0}^t dt'\right| = M(\alpha, r)\underbrace{|t-t_0|}_{\leq \alpha} \\
\Big\|\underbrace{x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x(t'))\,dt'}_{\mathcal{F}_x} - x_0\Big\| &\leq M(\alpha, r) \times \alpha \\
&\leq \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

soit $\int_{t_0}^t F(t', x(t'))\,dt' + x_0 \in \mathcal{B}(x_0, r/2)$

On peut donc définir $\mathcal{F} = \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} I_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{B}_f(x_0, r/2) \\ t & \longmapsto & x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x(t'))\,dt' \end{array} \right) \end{array} \right)$

2) NORME $\| \|_\lambda$ ET COMPLÉTUDE DE X POUR $\| \|_\lambda$

Puisqu'ici les fonctions de X sont continues et bornées car à valeurs dans une boule, on sait que $\| \| = \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sup_{t \in I_\alpha} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \end{array} \right)$ est une norme sur X pour laquelle il est complet. q_{13}.

Cependant on va introduire une norme $\| \|_\lambda$ paramétrée par λ qui nous assurera que $\mathcal{F}$ soit contractante (de $(X, \| \|_\lambda)$ dans $(X, \| \|_\lambda)$).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

On définit donc $\| \|_\lambda = \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sup_{t \in I_\alpha} e^{-\lambda|t_0 - t|} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \end{array} \right)$.

C'est une norme
- c'est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
- c'est homogène car $\| \|_{\mathbb{R}^n}$ et le sup le sont
- c'est nul ssi $\forall t \in I_\alpha \; \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$ c-à-d si $x = 0$ car exp ne s'annule jamais
- ça vérifie l'inégalité triangulaire car $\| \|_{\mathbb{R}^n}$ la vérifie et que le sup d'une somme est inférieur à la somme des sup.

Montrons que $\| \|_\lambda$ et $\| \|$ sont équivalentes.

$\forall t \in I_\alpha \quad |t - t_0| \leq \alpha$ donc $0 \geq -\lambda|t - t_0| \geq -\lambda\alpha$ et donc $\underbrace{e^0}_{1} \geq e^{-\lambda|t-t_0|} \geq e^{-\lambda\alpha}$

donc $\forall (x, y) \in X^2, \forall t \in I_\alpha, \|x(t) - y(t)\|_{\mathbb{R}^n} \geq \|x(t) - y(t)\|_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda|t-t_0|} \geq \|x(t) - y(t)\|_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda\alpha}$

En passant au sup pour $t \in I_\alpha$ on a $\|x - y\| \geq \|x - y\|_\lambda \geq e^{-\lambda\alpha} \|x - y\|$

Donc $\| \|$ et $\| \|_\lambda$ sont équivalentes, on en déduit que $(X, \| \|_\lambda)$ est aussi un espace de Banach.

3) MONTRER QUE POUR λ BIEN CHOISI $\mathcal{F}$ EST CONTRACTANTE

Soit $(x,y) \in X^2$. On aimerai que $\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\|_\lambda \leq 1 \, \|x-y\|_\lambda$.

$$\forall t \in I_\alpha \quad \|\mathcal{F}_{(x)}(t) - \mathcal{F}_{(y)}(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int_{t_0}^{t} F(t', x(t'))\, dt' + \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t} F(t', y(t'))\, dt' - \cancel{x_0} \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\| F(t', x(t')) - F(t', y(t')) \|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq \|x(t')-y(t')\|_{\mathbb{R}^n}} dt' \right|$$

car $t' \in \mathcal{B}(t_0, \alpha) \subset \mathcal{B}(t_0,$
$x(t') \in \mathcal{B}(x_0, r) \subset \mathcal{B}(x_0$
$y(t') \in$

$$\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|x(t') - y(t')\|_{\mathbb{R}^n} \, dt' \right|$$

donc

$$\|\mathcal{F}_{(x)} - \mathcal{F}_{(y)}\|_\lambda = \sup_{t \in I_\alpha} \left(e^{-\lambda |t_0 - t|} \| \mathcal{F}_{(x)}(t) - \mathcal{F}_{(y)}(t) \|_{\mathbb{R}^n} \right)$$

$$\leq \sup_{t \in I_\alpha} \left(k \, e^{-\lambda |t_0-t|} \left| \int_{t_0}^{t} \|x(t') - y(t')\|_{\mathbb{R}^n} \, dt' \right| \right)$$

$$= k \sup_{t \in I_\alpha} \left(\left| \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda |t_0 - t|} \frac{\underbrace{e^{-\lambda |t_0 - t'|} \|x(t') - y(t')\|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq \|x-y\|_\lambda}}{e^{-\lambda |t_0 - t'|}} dt' \right| \right)$$

$$\leq k \|x-y\|_\lambda \sup_{t \in I_\alpha} \Bigg(\underbrace{\left| \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda (|t_0 - t| - |t_0 - t'|)} dt' \right|}_{I(t)} \Bigg)$$

- Si $t \geq t_0$ $\quad I(t) = e^{-\lambda (t_0 - t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{+\lambda (t_0 - t')} dt'$

$$= e^{-\lambda (t_0 - t)} \left[\frac{1}{\lambda} e^{+\lambda (t_0 - t')} \right]_{t' = t_0}^{t' = t}$$

$$= e^{-\lambda (t_0 - t)} \times \frac{1}{\lambda} \times \left(e^{\lambda (t_0 - t)} - 1 \right)$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda (t_0 - t)}}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$$

- Si $t \leq t_0$ $\quad I(t) = e^{-\lambda (t - t_0)} \times \left(- \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{+\lambda (t' - t_0)} dt' \right)$

$$= e^{-\lambda (t - t_0)} \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda (t' - t_0)} \right]_{t' = t}^{t' = t_0}$$

$$= \frac{e^{-\lambda (t - t_0)}}{\lambda} \left(1 - e^{\lambda (t' - t_0)} \right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda (t - t_0)}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \leq \frac{e^{\overbrace{-\lambda (t - t_0)}^{\geq 0}}}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Donc $\displaystyle\sup_{t \in I_\alpha} I(t) \leq \frac{1}{\lambda}$ et $\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\|_\lambda \leq \frac{k}{\lambda} \|x-y\|_\lambda$

Pour $\lambda > k$ $\mathcal{F}$ est donc contractante de $(X, \|\ \|_\lambda)$ dans $(X, \|\ \|_\lambda)$.

4) CONCLURE A L'AIDE DU THÉOREME DU POINT FIXE DE PICARD

$\mathcal{F}$ est une application contractante de $(X, \| \|_2)$ dans $(X, \| \|_2)$ qui est complet donc $\mathcal{F}$ admet un unique point fixe, autrem^t dit il existe une unique fonction $x \in X = \mathcal{C}_0([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \mathcal{B}_f(x_0, r_2))$ telle que
$\forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, $x(t) = \mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', x(t'))\,dt'$.

On peut tout de suite remarquer $\underline{x(t_0)} = x_0 + 0 = \underline{x_0}$. **(1)**

De plus $x(t)$ est C^1 et $\underline{\boxed{\frac{dx}{dt}}(t) = F(t, x(t))}$ (pour tout $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ **(2)**

Et $\forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, $\underline{(t, x(t))} \in \mathcal{B}(t_0, \alpha) \times \mathcal{B}_f(x_0, r_2) \subset \mathcal{B}(t_0, \alpha) \times \mathcal{B}(x_0, r) \subset \mathcal{B}(t_0, \alpha) \times \mathcal{B}(t_0, r) \subset V \subset \underline{U}$ **(3)**

mais cette partie du résultat est juste là pour assurer que ce qu'on écrit (les $F(t, x(t))$ notamment) a bien un sens.