Convergence faible *

Soit E un $\mathbb{K}$-EV. Soit $\|\ \|$ une norme sur E. (Donc $(E, \|\ \|)$ est 1 EVN).

47.1 **Déf** φ est une <u>forme linéaire</u> sur $E \Leftrightarrow \varphi$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

47.2 E' est le <u>dual de E</u> $\Leftrightarrow E' = \{\varphi \mid \varphi$ forme linéaire sur $E\}$

47.3 E' est le <u>dual topologique de E</u> $\Leftrightarrow E' = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, \mathbb{K})\}$
= l'ens. des formes linéaires <u>contin</u>

47.4 **Pté** $(E', \|\ \|_{E'})$ où $\|\ \|_{E'} = \left(\begin{array}{l} E' \to \mathbb{R}^+ \\ \varphi \mapsto \sup\limits_{\|x\|=1} |\varphi(x)|_{\mathbb{K}} \end{array}\right) = \|\ \|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$
est un espace de Banach.

⚠ Ici comme partout en analyse fonctionnelle, E' désigne le dual topologique.
De même qu'on note souvent $\mathcal{L}(E,F)$ pour les f° linéaires <u>continues</u> de E ds F

démo C'est seulem^t la pté 14.1. c'est-à-dire ce qu'on sait déjà pour les ensembles d'applications linéaires quelconques, avec ici "$F = \mathbb{K}$".

47.5 **Déf** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$. Soit $u \in E'$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge * faiblement</u> vers u, noté $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{*} u$
$\Leftrightarrow \forall x \in E \quad u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$

Rq C'est en quelque sorte la cv. simple pour les formes linéaires.
Au lieu de s'intéresser à $\|u_n - u\|_{E'}$ on s'intéresse à $|u_n(x) - u(x)|_{\mathbb{K}}$ (pour tout x

Pté Soient $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$ et $l \in E'$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$.

47.6 • $l_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \Rightarrow l_n \to l$

47.7 • $l_n \to l \Rightarrow (l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée] Si E est de Banach!

47.8 • $\left.\begin{array}{l} l_n \to l \\ x_n \to x \end{array}\right\} \Rightarrow l_n(x_n) \longrightarrow l(x)$]

a) Si $l_n \to l$, $\|l_n - l\|_{E'} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $x \in E\setminus\{0\}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $\|l_n - l\|_{E'} \leq \varepsilon / \|x\|$.

alors $\forall n \geq N$ $|l_n(x) - l(x)| \leq \|l_n - l\|_{E'} \times \|x\| = \varepsilon$

D'où $l_n(x) \to l(x)$.

Si $x = 0_E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $l_n(x) = 0 = l(x)$, donc on a aussi $l_n(x) \to l(x)$

Ainsi on a bien $l_n \to l$.

b) Si $l_n \to l$, $\forall x \in E$ $l_n(x) \to l(x)$ donc $\forall x \in E$ $(l_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus (cf 44.1) $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c-à-d qu'il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|l_n\|_{E'} \leq M$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} |l_n(x_n) - l(x)| &= |l_n(x_n) - l_n(x) + l_n(x) - l(x)| \\ &\leq |l_n(x_n) - l_n(x)| + |l_n(x) - l(x)| \\ &= |l_n(x_n - x)| + |l_n(x) - l(x)| \\ &\leq \underbrace{\|l_n\|_{E'}}_{\text{est borné d'après b}} \underbrace{\|x_n - x\|_E}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } x_n \to x} + \underbrace{|l_n(x) - l(x)|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } l_n \to l} \end{aligned}$$

donc $|l_n(x_n) - l(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ soit $l_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l(x)$.

47.9 **Pté** Soient $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E')^{\mathbb{N}}$ et $l \in E'$

$$l_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \Rightarrow \|l\|_{E'} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|l_n\|_{E'}$$

Preuve : $a = \liminf_{n\to+\infty} \|l_n\|_{E'}$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(\|l_n\|_{E'})_{n\in\mathbb{N}}$

il existe donc φ une extraction telle que $\lim_{n\to+\infty} \|l_{\varphi(n)}\|_{E'} = a$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $x \in S_E(0,1)$. $l_n(x) \to l(x)$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ $|l_n(x) - l(x)| \leq \varepsilon/2$. Par ailleurs il existe $N' \geq N$ tel que $|\|l_{\varphi(N')}\|_{E'} - a| \leq \varepsilon/2$ soit $\|l_{\varphi(N')}\|_{E'} \leq a + \varepsilon/2$.

Puisque $\varphi(N') \geq N' \geq N$ $|l_{\varphi(N')}(x) - l(x)| \leq \varepsilon/2$

Donc $|l(x)| \leq |l_{\varphi(N')}(x)| + \varepsilon/2 \leq \|l_{\varphi(N')}\|_{E'} \cdot \underbrace{\|x\|_E}_{=1} + \varepsilon/2$

$\leq a + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = a + \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\sup_{x \in S_E(0,1)} |l(x)| \leq a + \varepsilon$ soit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\|l\|_{E'} \leq a + \varepsilon$

d'où, en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$; $\|l\|_{E'} \leq a$.

47.10 **Pté** Soit $(E, \|\ \|_E)$ un EVN séparable de dimension infinie.
Il existe $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $\overline{\mathrm{Vect}(e_i \mid i\in\mathbb{N})} = E$
et que $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $(e_a)_{a\in A}$ soit une famille libre.

Preuve : Par définition de la séparabilité il existe X une partie dense et dénombrable de E. Puisqu'elle est dénombrable il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tq $X = \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

- Puisque $E \neq \{0_E\}$ il existe nécessairement $i\in\mathbb{N}$ tq $x_i \neq 0_E$. On peut alors poser $\varphi(0) = \min\{i\in\mathbb{N} \mid x_i \neq 0_E\}$
- Si $X \subset \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})$ alors $\overline{X} = \overline{\mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})} = \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})$ or $\dim E \neq$ … et $E = \overline{X}$ donc c'est impossible. Ainsi $X \setminus \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)}) \neq \emptyset$. Il existe donc $i\in\mathbb{N}$ tel que $x_i \in X\setminus \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})$. Si $i<\varphi(0)$ $x_i = 0_E \in \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})$ et si $i=\varphi(0)$ $x_i = x_{\varphi(0)} \in \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})$ donc $i > \varphi(0)$.

On peut donc poser $\varphi(1) = \min\{j > \varphi(0) \mid x_j \notin \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})\}$ ainsi $\varphi(1) > \varphi(0)$; (a1)

(b1) $x_{\varphi(1)} \notin \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)})$ et $\{x_j \mid j\in[0..\varphi(1)]\} \subset \{0_E\} \cup \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)}) \cup \{x_{\varphi(1)}\} \subset \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)}, \ldots$ (c1)

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose avoir construit $(\varphi(i))_{i\in[0..n]}$ tel que
  - $\forall (i,j)\in[0..n]^2$ $i<j \Rightarrow \varphi(i)<\varphi(j)$ (a_n)
  - $\forall i \in [1..n]$ $x_{\varphi(i)} \notin \mathrm{Vect}\{x_{\varphi(k)} \mid k\in[0..i-1]\} := V_{i-1}$ (b_n)
  - $\{x_j \mid j\in[0..\varphi(n)]\} \subset V_n := \mathrm{Vect}(\{x_{\varphi(k)} \mid k\in[0..n]\})$ (c_n)

Si $X\subset V_n$ alors $E=\overline{X}\subset \overline{V_n} = V_n$ or $\dim E = \infty$, c'est donc impossible.
Donc $X\setminus V_n \neq \emptyset$. Il existe donc $i\in\mathbb{N}$ tq $x_i \in X\setminus V_n$. $x_i\notin V_n$ donc $x_i \notin \{x_j \mid j\in[0..$ …
donc $i>\varphi(n)$. On peut alors définir $\varphi(n+1) = \min\{j>\varphi(n) \mid x_j \notin V_n\}$.
On a bien • $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc (a_{n+1}) est vérifiée

- $x_{\varphi(n+1)} \notin V_n$ donc (b_{n+1}) est vérifiée
- $\{x_j \mid j\in[0..\varphi(n+1)]\} = \underbrace{\{x_j \mid j\in[0..\varphi(n)]\}}_{\in V_n \text{ car } c_n} \cup \underbrace{\{x_j \mid j\in[\varphi(n)+1 \ldots \varphi(n+1)[\}}_{\subset V_n \text{ par déf de } \varphi(n+1)} \cup \underbrace{\{x_{\varphi(n+1)}\}}_{\in V_{n+1}}$

donc $\{x_j \mid j\in[0..\varphi(n+1)]\} \subset V_{n+1}$ donc (c_{n+1}) est vérifiée.

Ainsi par récurrence on peut extraire (φ est une extractrice par (a_n)) une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs linéairement indépendants (par b_n) telle que $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}} = E$ car $\mathrm{Vect}\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \underset{\text{par } (c_n)}{\supset} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_i \mid i\in[1..n]\} = X$

Pté Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension infinie. Soit $\| \ \|_E$ une norme sur E.
Soit $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'^{\mathbb{N}}$.
$(E, \| \ \|_E)$ est de Banach
$(E, \| \ \|_E)$ est séparable
$(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
$\Rightarrow$ Il existe $l \in E'$ et Ψ une extraction telles que $l_{\Psi(n)} \xrightarrow{*} l$

__Démonstration__ Notons M un majorant de $\{\|l_n\|_{E'} \mid n\in\mathbb{N}\}$.
D'après 47.10 il existe $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs linéairements indépendants (ou plutôt une suite dont toute sous famille finie est libre) telle que $\overline{V} = E$ où $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $V_n = \mathrm{Vect}(\{e_i \mid i\in[0..n]\})$.

__1) CONSTRUISONS L'EXTRACTRICE Ψ__

• $\forall k\in\mathbb{N}$ $|l_k(e_0)| \leq \|l_k\|_{E'} \|e_0\|_E \leq M\|e_0\|_E$.
Donc $\{l_k(e_0) \mid k\in\mathbb{N}\}$ est un fermé borné de $\mathbb{K}$, donc un compact, il existe donc $y_0 \in \mathbb{K}$ et φ_0 une extraction telles que $l_{\varphi_0(k)}(e_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y_0$. On pose $\Phi_0 = \varphi_0$.
• Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose avoir construit $(\varphi_i)_{i\in[0..n]}$, $n+1$ extractices et $(y_i)_{i\in[0..n]} \in \mathbb{K}^{n+1}$ telles qu'en notant $\Phi_n = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n$ on ait $\forall k\in[0..n]$ $l_{\Phi_k(j)}(e_k) \xrightarrow[j\to+\infty]{} y_k$
$\forall j\in\mathbb{N}$, $|l_{\Phi_k(j)}(e_{n+1})| \leq \|l_{\Phi_k(j)}\|_{E'} \times \|e_{n+1}\|_E \leq M\|e_{n+1}\|_E$
Donc $\{l_{\Phi_k(j)}(e_{n+1}) \mid j\in\mathbb{N}\}$ est un compact de $\mathbb{K}$ en tant que fermé borné.
Alors il existe φ_{n+1} une extraction et $y_{n+1} \in \mathbb{K}$ tq $l_{\Phi_k \circ \varphi_{k+1}(j)}(e_{n+1}) \xrightarrow[j\to+\infty]{} y_{n+1}$
$\rightarrow$ Par récurrence on construit ainsi la suite d'extractices $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et la suite de limites dans $\mathbb{K}$ $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

On pose $\Psi = \begin{pmatrix} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \Phi_n(n) \text{ c-à-d } \varphi_0\circ\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_n(n) \end{pmatrix}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\Psi(n+1) = \Phi_n \circ \underbrace{\varphi_{n+1}(n+1)}_{\geq n+1 \text{ car } \varphi_{n+1} \text{ est 1 une extraction}} \geq \Phi_n(n+1) > \Phi_n(n) = \Psi(n)$

donc Ψ est st $\nearrow$, c'est donc bien une extraction (= extractice selon mon humeur)

__2) CONSTRUISONS l LINÉAIRE CONTINUE DE E DANS $\mathbb{K}$__

Soit $p\in\mathbb{N}$. $\forall n\geq p$ $\Psi(n) = \Phi_n(n) = \Phi_p \circ \underbrace{\varphi_{p+1}\circ\dots\circ\varphi_n}_{\text{éventuellem}^t \text{ id si } n=p}(n) \in \mathrm{Im}(\Phi_p)$.
Donc $\left(l_{\Psi(n)}(e_p)\right)_{n\geq p}$ est extraite de $\left(l_{\Phi_p(n)}(e_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Or on sait que $l_{\Phi_p(n)}(e_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_p$ donc $\forall p\in\mathbb{N}$, $l_{\Psi(n)}(e_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_p$

On est donc assuré que $(l_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement pour tous les $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on cherche donc à l'étendre à V : $\forall x\in V,\ \exists!\, k\in\mathbb{N},\ \exists!\,(\lambda_i)_{i\in[1..k]}\in\mathbb{K}^k,\ x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i$

alors $\forall n\in\mathbb{N}\ l_{\varphi(n)}(x) = l_{\varphi(n)}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\, l_{\varphi(n)}(e_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i$.

On peut donc définir $\tilde{l} = \left(\begin{array}{l} V \to E \\ x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} l_{\varphi(n)}(x)\end{array}\right)$.

$\tilde{l}$ est linéaire car chaque $l_{\varphi(n)}$ ainsi que la limite le sont.

De plus $\forall (x,y)\in V^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |l_{\varphi(n)}(x) - l_{\varphi(n)}(y)| = |l_{\varphi(n)}(x-y)| \leq \|l_{\varphi(n)}\|_{E'}\|x-y\| \leq M\|x-y\|$

Donc en passant à la limite pour $n\to+\infty$ on a $\forall (x,y)\in V^2\ |\tilde{l}(x)-\tilde{l}(y)| \leq M\|x-y\|$

autrement dit $\tilde{l}$ est M-lipschitzienne donc uniformément continue sur V dense dans E, un espace de Banach. On peut donc la prolonger sur E par l continue sur E.

Montrons que l est linéaire. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Soit $(x,y)\in E^2$. Il existe $(x_i, y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in(V^2)^{\mathbb{N}}$ tel que $x_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} x$ et $y_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} y$ (par densité de V dans E). On a alors $\lambda x_i + y_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} \lambda x + y$

Par continuité de l on en déduit :

$$l(\lambda x+y) = \lim_{n\to+\infty} l(\lambda x_n + y_n) \underset{\text{car } \lambda x_n + y_n\in V}{=} \lim_{n\to+\infty}\tilde{l}(\lambda x_n + y_n) \underset{\text{car } \tilde{l} \text{ linéaire}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\lambda\tilde{l}(x_n)+\tilde{l}(y_n)\right) = \lambda\lim_{n\to+\infty}\left(\tilde{l}(x_n)\right) + \lim_{n\to+\infty}\left(\tilde{l}(y_n)\right)$$

$$\text{et } \lambda l(x) + l(y) \underset{\text{continuité de } l}{=} \lambda\lim_{n\to+\infty} l(x_n) + \lim_{n\to+\infty} l(y_n) \underset{\substack{\text{car } x_n\in V\\ y_n\in V}}{=} \lambda\lim_{n\to+\infty}\tilde{l}(x_n) + \lim_{n\to+\infty}\tilde{l}(y_n)$$

Donc $l(\lambda x + y) = \lambda l(x+y)$. D'où l est linéaire continue sur E soit $\underline{l\in E'}$

3) RESTE À MONTRER QUE $l_{\varphi(n)} \to l$

Soit $x\in E$. Par densité de V dans E il existe $x'\in V\cap\mathcal{B}(x, \varepsilon/3M)\cap\mathcal{B}(x, \varepsilon/3\|l\|_{E'})$

Puisque $\tilde{l}(x') = \lim\limits_{n\to+\infty} l_{\varphi(n)}(x')$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N\ |\tilde{l}(x') - l_{\varphi(n)}(x')| \leq \varepsilon/3$.

Donc $\forall n\geq N$ on a

$$\begin{aligned}
|l(x) - l_{\varphi(n)}(x)| &= |l(x) - l(x') + l(x') - l_{\varphi(n)}(x') + l_{\varphi(n)}(x') - l_{\varphi(n)}(x)| \\
&\leq |l(x-x')| + |l(x') - l_{\varphi(n)}(x')| + |l_{\varphi(n)}(x'-x)| \\
&\leq \|l\|_{E'}\times\|x-x'\| + |\tilde{l}(x') - l_{\varphi(n)}(x')| + \underbrace{\|l_{\varphi(n)}\|}_{\leq M}\times\|x'-x\| \\
&\leq \|l\|_{E'}\times\frac{\varepsilon}{3\|l\|_{E'}} + \varepsilon/3 + M\times\frac{\varepsilon}{3M} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où $l_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l(x)$ et puisque c'est vrai $\forall x\in E$, $\underline{l_{\varphi(n)} \longrightarrow l}$