Identifier les l^p à des duals

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

54.1 **Rappel** • $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ = l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ bornées
$= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists M \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M\}$

$\| \ \|_\infty = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est une norme sur l^∞

• $\forall p \in [1, +\infty[$ $\quad l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ = l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ à puissance p-ième sommable
$= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$

$\| \ \|_{l^p} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur l^p

54.2 **Pté** Soit $p \in [1, +\infty]$. On pose $p' = \dfrac{1}{1 - 1/p}$ si $p \neq 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$

Alors $B = \left(\begin{array}{ccc} l^{p'} \times l^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \times y_n \end{array} \right)$ est une forme bilinéaire continue

Preuve Montrons déjà que c'est bien défini.
Soit $(x, y) \in l^{p'} \times l^p$.

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} |x_n y_n| = \sum_{n=0}^{N} |x_n| \times |y_n|$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p\right)^{1/p}$$

par Hölder car $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 - 1/p + 1/p = 1$ si $p \neq 1$
$= 1/\infty + 1/1 = 0 + 1 = 1$ si $p = 1$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^{p'}\right)^{1/p'} \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}$$
$$= \|x\|_{l^{p'}} \times \|y\|_{l^p}$$

Donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |x_n y_n| \leq \|x\|_{l^{p'}} \times \|y\|_{l^p} < \infty$

Donc la série des $(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument dans $\mathbb{K}$ qui est complet (de Banach donc), on en déduit qu'elle converge tout court et $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \times y_n \in \mathbb{K}$, donc B bien défini.

· Puisque le produit dans $\mathbb{K}$, ~~l'addition~~ la somme dans $\mathbb{K}$ et le passage à la limite (quand $N \to +\infty$) sont des opérations linéaires il apparait assez facilement que B est bilinéaire.

· On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{n=0}^{N} x_n y_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^{p'}} \times \|y\|_{\ell^p}$.
En passant à la limite quand $N \to +\infty$ on a finalement $|B(x,y)| \leq \|x\|_{\ell^{p'}} \times \|y\|_{\ell^p}$.
On a donc la continuité de B en 0, et puisqu'il s'agit d'une application bilinéaire cela suffit à montrer sa continuité.

54.3 **Déf** $c_0(\mathbb{N},\mathbb{K})$ = l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ convergeant vers 0
$= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$

54.5 **Pté** $c_0(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et $\| \ \|^\infty/_{c_0}$ est une norme sur C^0.

Preuve Il suffit de se rappeler qu'une suite convergeante est bornée.
En effet au delà d'un certain rang elle est au voisinage de sa limite, et avant elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (on peut donc prendre le sup = le max $< \infty$).

54.6 **Pté** · $\forall p \in [1, +\infty[$ B identifie $\ell^{p'}$ à $(\ell^p)'$
c-à-d $\forall l \in (\ell^p)', \exists! y \in \ell^{p'}, l = B(y, \cdot)$ (a)

· $B_{/\ell^1 \times C^0}$ identifie ℓ^1 à $(C^0)'$.
c-à-d $\forall l \in (C^0)', \exists! y \in \ell^1, l = B_{/\ell^1 \times C^0}(y, \cdot)$ (b)

Preuve • $\forall y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall r \in \mathbb{N}$, on note $y_{/r} = \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto \begin{cases} y_n & \text{si } n \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

• $\forall n \in \mathbb{N}$ on note $e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$.

(a). Soit $l \in (l^p)'$.

→ S'il existe $y \in l^{p'}$ tq $\forall x \in l^p$, $l = B(y, \cdot)$ on a en particulier, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $e_n \in l^p$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $l(e_n) = B(y, e_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k \underbrace{e_{n,k}}_{\delta_{n,k}} = y_n$.

Donc y est entièrement déterminée, d'où l'unicité.

→ Réciproquement on pose $y = (l(e_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

– Montrons que $y \in l^{p'}$.

– Si $p = 1$. $p' = +\infty$ par convention.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n| = |l(e_n)| \leq |||l|||_{\mathcal{L}(l^1, \mathbb{K})} \times \|e_n\|_{l^1}$
$(l^1)'$

or $\|e_n\|_{l^1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |(e_n)_k|$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}} |\delta_{n,k}| = \delta_{k,k} = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leq |||l|||_{(l^1)'}$ d'où $y \in l^\infty$.

– (Si) $p \in]1, +\infty[$

On pose $\forall r \in \mathbb{N}$, $x_r = \sum_{n\leq r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} |y_n|^{p'-1} \times e_n$

* pondérée.

⚠ x_r est une suite définie comme somme* de r suites, les e_n.

Rq ~~les y_n sont non nuls car ils valent $l(e_n)$ où~~ l linéaire, e_n non nul.

En fait si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\frac{\overline{y_n}}{|y_n|} = \text{signe}(y_n)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\frac{\overline{y_n}}{|y_n|} = e^{i\arg(\overline{y_n})} = e^{-i\arg(y_n)}$

$\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall k > r$ $(x_r)_k = \sum_{n\leq r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} |y_n|^{p'-1} \underbrace{e_{n,k}}_{\delta_{n,k} = 0 \text{ car } n \leq r < k} = 0$.

Donc x_r est nulle p.p donc $x_r \in l^p$.

$\forall r \in \mathbb{N}$ $l(x_r) = l\left(\sum_{n=0}^{r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} |y_n|^{p'-1} e_n\right) = \sum_{n=0}^{r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} |y_n|^{p'-1} \underbrace{l(e_n)}_{y_n}$

$= \sum_{n=0}^{r} \frac{\overbrace{\overline{y_n} \times y_n}^{|y_n|^2}}{|y_n|} \times |y_n|^{p'-1} = \sum_{n=0}^{r} |y_n|^{p'} = \sum_{n=0}^{+\infty} |(y_{/r})_n|^{p'}$

$= \|y_{/r}\|_{l^{p'}}^{p'}$

Par ailleurs $\forall r \in \mathbb{N}$ $l(x_r) \leq |||l|||_{(l^p)'} \|x_r\|_{l^p}$

et $\|x_r\|_{l^p}^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |(x_r)_n|^p = \sum_{n=0}^{r} |(x_r)_n|^p = \sum_{n=0}^{r} \left| \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} |y_k|^{p'-1} \underbrace{e_{k,n}}_{\delta_{n,k}} \right|^p = \sum_{n=0}^{r} \left| \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} |y_n|^{p'-1} \right|^p$

$= \sum_{n=0}^{r} \underbrace{\left|\frac{\overline{y_n}}{|y_n|}\right|^p}_{=1} |y_n|^{p\times(p'-1)}$ or $\frac{p'}{p} + \frac{p'}{p'} = p'$ donc $\frac{p'}{p} = p' - 1$ donc $(p'-1) \times p = p'$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} |(y_{/r})_n|^{p'} = \|y_{/r}\|_{l^{p'}}^{p'}$

Donc $\|y_{/r}\|_{\ell^{p'}}^{p'} \leq \|l\|_{(\ell^p)'} \cdot \|y_{/r}\|_{\ell^{p'}}^{p'/p}$ $(\forall r \in \mathbb{N})$

soit $\forall r \in \mathbb{N}$ $\|y_{/r}\|_{\ell^{p'}}^{p'(1-\frac{1}{p})} \leq \|l\|_{(\ell^p)'}$ et puisque $1-\frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$

$\forall r \in \mathbb{N}$ $\|y_{/r}\|_{\ell^{p'}} \leq \|l\|_{(\ell^p)'}$. donc $\sum_{n=0}^{r} |y_n|^{p'} \leq \|l\|_{(\ell^p)'}^{p'}$

En passant à la limite pour $r \to +\infty$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^{p'} \leq \|l\|_{(\ell^p)'}^{p'} < \infty$

donc $y \in \ell^{p'}$

- Montrons que $l = B(y, \cdot)$.

Soit $x \in \ell^p$. $B(y,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n\leq N} x_n\, l(e_n)$

$= \lim_{N\to+\infty} l\left(\sum_{n\leq N} x_n e_n\right) = \lim_{N\to+\infty} l(x_{/N})$

$= l\left(\lim_{N\to+\infty} x_{/N}\right)$ car l est continue et parce qu'on sait que $x_{/N} \to x$ dans ℓ^p (car $\|x - x_{/N}\|_{\ell^p}^p$ est le reste d'une série cv, il tend donc vers 0)

$= l(x)$

b) Soit $l \in (c_0)'$.

→ S'il existe $y \in \ell^1$ tq $l = B_{/\ell^1 \times c_0}(y, \cdot)$ on a en particulier, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $e_n \in c^0$ en tant que suite nulle pp, $\forall n \in \mathbb{N}$ $l(e_n) = B_{/\ell^1\times c_0}(y, e_n) = B(y, e_n)$

D'où l'unicité. $= y_n$

→ Réciproquement on pose $y = (l(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

- Montrons que $y \in \ell^1$.

$\forall r \in \mathbb{N}$ on pose $x_r = \sum_{n\leq r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} e_n$. x_r est nulle p.p (pour $n \geq r$) donc $x_r \in c^0$.

$\forall r \in \mathbb{N}$ $l(x_r) = l\left(\sum_{n\leq r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} e_n\right) = \sum_{n\leq r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} l(e_n) = \sum_{n\leq r} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} \cdot y_n = \sum_{n\leq r} |y_n| = \|y_{/r}\|_{\ell^1}$.

or $\forall r \in \mathbb{N}$ $l(x_r) \leq \|l\|_{(c_0)'} \cdot \|x_r\|_{c^0}$

et $\forall r \in \mathbb{N}$ $\|x_r\|_{c^0} = \|x_r\|_{\ell^\infty} = \max_{n\leq r} |(x_r)_n| = \max_{n\leq r} \left|\frac{\overline{y_n}}{|y_n|}\right| = 1$

donc $\|y_{/r}\|_{\ell^1} \leq \|l\|_{c_0'}$ (et ce $\forall r \in \mathbb{N}$). Donc $\forall r \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=0}^{r} |y_n| \leq \|l\|_{(c_0)'}$

En passant à la limite pour $r \to +\infty$ on a $\leq \|l\|_{(c_0)'} < \infty$

donc $y \in \ell^1$

- Montrons que $l = B_{/\ell^1\times c_0}(y, \cdot)$

Soit $x \in c^0$. $B_{/\ell^1\times c^0}(y,x) = B(y,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\, l(e_n)$

$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n\leq N} x_n\, l(e_n) = \lim_{N\to+\infty} l\left(\sum_{n\leq N} x_n e_n\right)$

$= \lim_{N\to+\infty} l(x_{/N})$. et $x_{/N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} x$ $\boxed{\text{car } x \in c^0}$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |x_n| \leq \varepsilon$

continuité de l $= l\left(\lim_{N\to+\infty} x_{/N}\right)$

de $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_0$ $\|x - x_{/N}\|$

$= l(x)$.