$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} A_\varepsilon + B_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx$$

car $x \mapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}$ est paire
$\dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} = \dfrac{\varphi(-x) - \varphi(x)}{-x}$

On a donc $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\Lambda'(\varphi) = vp(\frac{1}{x})(\varphi)$. d'où $vp(\frac{1}{x}) = \Lambda'$ « $= \log(|x|)'$ »

Valeur principale

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

SS.1 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{array} \right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

SS.2 On peut alors définir $\boxed{vp\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \, dx \end{array} \right)}$

SS.3 $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $vp\left(\frac{1}{x}\right) = \Lambda'$ où $\Lambda = i(x \mapsto \log(|x|))$

$= \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) (\log(|x|) \, dx$

" $vp\left(\frac{1}{x}\right) = \log(|x|)'$ "

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Par définition φ est C^∞ et φ comme φ' sont bornées, par $\|\varphi\|_{S,1}$.

- Puisque φ est dérivable en 0 on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0) \leq 2\|\varphi'\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_{S,1}$$

- Par théorème des accroissements finis on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x) - \varphi(-x)| \leq |x - (-x)| \sup_{y \in \mathbb{R}} \|\varphi'(y)\| = 2|x| \|\varphi'\|_\infty$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq 2\|\varphi'\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_{S,1}$.

- De plus $\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq \frac{|x\varphi(x)|}{|x|^2} + \frac{|x\varphi(x)|}{|x|^2} \leq \frac{2\|\varphi\|_{S,1}}{|x|^2}$.

On pose alors $\psi = \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \begin{cases} 2\|\varphi\|_{S,1} & \text{si } x \in [-1,1] \\ \frac{2\|\varphi\|_{S,1}}{|x|^2} & \text{si } x \in [-1,1]^c \end{cases} \end{array} \right)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq \psi(x)$

or $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \int_{-1}^{1} 2\|\varphi\|_{S,1} dx + \int_{-\infty}^{-1} \frac{2\|\varphi\|_{S,1}}{|x|^2} dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{2\|\varphi\|_{S,1}}{|x|^2} dx$

$$= 2\|\varphi\|_{S,1} \Big(\underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + 2 \times \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{|x|^2} dx}_{\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1} \Big) = 8\|\varphi\|_{S,1}$$

On en déduit que Ψ est intégrable et par conséquent $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ aussi. (a)

Donc $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien définie et $vp\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\, \dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\, dx \leq 4\, \|\varphi\|_{1,S}$

Ce qui suffit, puisque $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est clairement linéaire, à assurer sa continuité au sens de l'espace de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Donc $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathbb{K}) = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Autrement dit $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien une distribution tempérée.

b) On note $\Lambda = i(x \mapsto \log(|x|)) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \log(|x|)\, dx \end{pmatrix}$.
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\Lambda'(\varphi) = -\Lambda(\varphi') \quad \text{par déf de la dérivée des distributions}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} -\log(|x|)\, \varphi'(x)\, dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,+\varepsilon]} -\log(|x|)\, \varphi'(x)\, dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\underbrace{\int_{\varepsilon}^{+\infty} -\log(x)\, \varphi'(x)\, dx}_{A_\varepsilon} + \underbrace{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} -\log(-x)\, \varphi'(x)\, dx}_{B_\varepsilon} \Big]$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $A_\varepsilon = -\int_{\varepsilon}^{+\infty} \log(x)\, \varphi'(x)\, dx$
$$= -\big[\log(x)\, \varphi(x)\big]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\, \varphi(x)\, dx \quad \Big\}\ \text{Par intégra° par partie}$$
$$= \log(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon) - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \log(x)\, \varphi(x)}_{=0 \text{ car } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\, \varphi(x)\, dx$$

$$B_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} -\log(-x)\, \varphi'(x) \quad \Big\}\ \text{Ipp}$$
$$= \big[-\log(-x)\, \varphi(x)\big]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, \varphi'(x)\, dx \quad \to \text{chgm}^t \text{ de variable}$$
$$= -\log(\varepsilon)\, \varphi(-\varepsilon) + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \log(-x)\, \varphi(x)}_{=0 \text{ car } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} - \int_{+\varepsilon}^{+\infty} (-1)\times\frac{1}{-x}\, \varphi(-x)\, dx$$
$$= -\log(\varepsilon)\, \varphi(-\varepsilon) - \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\, \varphi(-x)\, dx$$

Donc $A_\varepsilon + B_\varepsilon = \log(\varepsilon) \underbrace{\big[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\big]}_{\leq 2\|\varphi'\|_\infty \varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\big(\varphi(x) - \varphi(-x)\big)\, dx$

quand $\varepsilon \to 0$: 0 ; $\int_{\mathbb{R}^+} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\, dx$