

Pseudo-inverse de Moore–Penrose et propriété de norme minimale

Piroutet Alban

CMAT Braga

sous la direction de Pedro Patricio
26/08/2025

Plan

- 1 Motivation
- 2 Définition
- 3 Calcul via la décomposition en valeurs singulières
- 4 Moindres carrés et norme minimale
- 5 Preuve
- 6 Cas particuliers
- 7 Exemple simple
- 8 Applications
- 9 Références

Pourquoi les pseudo-inverses ?

- Résoudre $Ax = b$ quand A n'est pas inversible (rectangulaire ou singulière).
- Modèles sur-déterminés (moindres carrés) et sous-déterminés (infinité de solutions).
- Nécessité d'une solution **canonique** : stable, de **plus petite norme**.

Équations de Moore-Penrose

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Le pseudo-inverse $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times m}$ est l'unique matrice vérifiant :

- (1) $AA^\dagger A = A,$
- (2) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger,$
- (3) $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger,$
- (4) $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A.$

Proposition

L'inverse de Moore-Penrose existe et est unique !

Calcul de $A^\dagger$ par la décomposition en valeurs singulières

Proposition

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et soient $\lambda_j(AA^*)$ les valeurs propres de la matrice AA^* ordonnées par ordre croissant.

$$\lambda_1(AA^*) \geq \lambda_2(AA^*) \geq \cdots \geq \lambda_r(AA^*) > \lambda_{r+1}(AA^*) = \cdots = \lambda_n(AA^*) = 0, \quad (1)$$

avec $r = \text{rang}(A)$.

Les valeurs singulières de A , notées $\sigma_j(A)$ ou σ_j , pour $j = 1, \dots, r$, sont définis par

$$\sigma_j(A) = \sqrt{\lambda_j(AA^*)}, \quad j = 1, \dots, r,$$

avec

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

Soit $\{u_i : i = 1, \dots, m\}$ une base orthonormée $\mathbb{C}^m$ formée de vecteurs propres de AA^* ,

$$AA^*u_i = \sigma_i^2 u_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2a)$$

$$AA^*u_i = 0, \quad i = r + 1, \dots, m. \quad (2b)$$

Posons

$$v_j = \frac{1}{\sigma_j} A^* u_j, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3)$$

et soit $\{v_j : j = r + 1, \dots, n\}$ une famille de vecteurs orthonormés orthogonale à $\{v_j : j = 1, \dots, r\}$.

Alors $\{v_j : j = 1, \dots, n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A^*A , vérifiant

$$A^*Av_j = \sigma_j v_j, \quad j = 1, \dots, r, \quad (4a)$$

$$A^*Av_j = 0, \quad j = r + 1, \dots, n. \quad (4b)$$

Réciproquement, on peut construire une base orthonormale $\{u_i : i = 1, \dots, m\}$ de $\mathbb{C}^m$ vérifiant (2a) et (2b)

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (5)$$

On observe qu'alors $A = U \Sigma V^*$ avec $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaires, et $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots)$.

Proposition

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^*, \quad \Sigma^\dagger = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots \right).$$

But

Minimiser

$$x \in \mathbb{C}^n, \|Ax - b\|_2.$$

- Notons l'ensemble des solutions des moindres carrés **LS**.
- En général : **infinité** de solutions LS.

Énoncé

Parmi toutes les solutions de moindres carrés, **celle de plus petite norme euclidienne** est

$$x_{\min} = A^{\dagger}b.$$

Description de tous les minimiseurs

$$\mathcal{S} = \{ A^{\dagger}b + (I - A^{\dagger}A)w : w \in \mathbb{C}^n \}.$$

En particulier, $x_{\min} = A^{\dagger}b$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ orthogonal à $\ker(A)$.

On admet ces résultats :

Proposition

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{C}^m$. Alors $\|Ax - b\|$ est minimale lorsque

$$x = A^{(1,3)} b,$$

où $A^{(1,3)} \in A\{1, 3\}$.

Proposition

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$. Si l'équation $Ax = b$ admet une solution, la solution de plus petite norme est alors

$$x = A^{(1,4)} b,$$

où $A^{(1,4)} \in A\{1, 4\}$.

Les solutions LS de $Ax = b$ sont aussi les solutions de

$$Ax = AA^{(1,3)}b. \quad (\text{eq})$$

Ainsi, la solutions LS de norme minimale de $Ax = b$ est la solution de norme minimale de (eq).
Par la deuxième proposition on a donc :

$$x = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}b = A^\dagger b,$$

Colonnes indépendantes ($\text{rang}(A) = n$) :

$$A^\dagger = (A^* A)^{-1} A^*, \quad x_{\min} = (A^* A)^{-1} A^* b.$$

Lignes indépendantes ($\text{rang}(A) = m$) :

$$A^\dagger = A^* (A A^*)^{-1}.$$

- Dans les deux cas, $x_{\min} = A^\dagger b$ reste valable.

Exemple illustratif

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Minimiser $\|Ax - b\|_2^2 = (x_1 - 1)^2 + (0 - 1)^2 \Rightarrow$ optimal si $x_1 = 1$, x_2 arbitraire.
- Tous les minimiseurs : $x = (1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Norme $\|x\|_2^2 = 1 + t^2 \Rightarrow$ minimum pour $t = 0$.

$$\Rightarrow x_{\min} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A^\dagger b.$$

- Régression linéaire et ajustement de modèles.
- Moindres carrés contraints (projeter puis pseudo-inverser).
- Reconstruction, filtrage, apprentissage automatique (solutions *minimum-norm*).



A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverses*, Springer.

Avez-vous des questions ?