

Interpolation complexe, lemmes et théorèmes associés

Ametti Mohamed, Pernel Elias, Piroutet Alban

06/11/2024

Introduction et contexte

Soient (Ω, μ) et (U, ν) deux espaces mesurés avec μ et ν des mesures positives. On note $L^p(\Omega)$ (resp $L^q(U)$) l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions μ -mesurable de Ω dans $\mathbb{C}$ telle que $\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Dans le cas $p = +\infty$, on a $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$. On considère T une application linéaire sur $(L^p(\Omega), d\mu)$ dans $(L^q(U), d\nu)$ bornée.

Introduction et contexte

Soient (Ω, μ) et (U, ν) deux espaces mesurés avec μ et ν des mesures positives. On note $L^p(\Omega)$ (resp $L^q(U)$) l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions μ -mesurable de Ω dans $\mathbb{C}$ telle que $\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Dans le cas $p = +\infty$, on a $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$. On considère T une application linéaire sur $(L^p(\Omega), d\mu)$ dans $((L^q(U)), d\nu)$ bornée.

Question

Si T est bornée entre deux espaces L^p on peut se demander si T est encore bornée entre des espaces intermédiaires !

Lemme des trois droites de Hadamard

Lemme des trois droites de Hadamard

Soit F une fonction continue, bornée sur la bande fermée $\{0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ et analytique sur la bande ouverte $\{0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$.

On suppose $|F(it)| \leq M_0$ et $|F(1+it)| \leq M_1$ pour $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall \theta \in [0, 1], \forall t \in \mathbb{R}, |F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

Corollaire du principe du maximum

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Alors, pour tout $z \in \Omega$, on a $|f(z)| \leq \sup\{|f(w)| : w \in \partial\Omega\}$.

Théorème de Riesz-Thorin

Théorème de Riesz-Thorin

Soient $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$, T un opérateur borné de $L^{p_0}(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^{q_0}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ de norme M_0 et de $L^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^{q_1}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ de norme M_1 .

Alors T est un opérateur borné de $L^{p_\theta}(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^{q_\theta}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ de norme M_θ avec :

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \theta \in (0, 1)$$

Théorème de Riesz-Thorin

Théorème de Riesz-Thorin

Soient $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$, T un opérateur borné de $L^{p_0}(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^{q_0}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ de norme M_0 et de $L^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^{q_1}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ de norme M_1 .

Alors T est un opérateur borné de $L^{p_\theta}(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^{q_\theta}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ de norme M_θ avec :

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \theta \in (0, 1)$$

Remarque

Ce théorème nécessite de pouvoir définir l'opérateur T sur un espace L^p intermédiaire. Une façon de le faire serait de s'assurer qu'il coïncide sur l'intersection de ces deux parties. Et d'utiliser par la suite une partie dense dans les deux espaces et de par la suite prolonger par continuité.

Application n°1

Transformée de Fourier

Ici, $\Omega = U = \mathbb{R}^n$ et $d\mu = d\nu = dx$ (mesure de Lebesgue). On s'intéresse à la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

Inégalité de Hausdorff-Young

Si $1 \leq p \leq 2$, alors

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^{p'}} \leq (2\pi)^{n/p'} \|f\|_{L^p}$$

Application n°2

Opérateur de convolution

Soit $k \in L^q$. On définit un opérateur de convolution T par :

$$Tf(x) = \int k(x-y)f(y)dy$$

Inégalité de Young

Soit $f \in L^p$, avec $1 < p < q'$, alors $k * f \in L^r$ pour $1/r + 1 = 1/p + 1/q$, et

$$\|k * f\|_{L^r} \leq \|k\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$$