



Leçon n° 205 : Espaces complets. Exemples et applications

Piroutet Alban

-Mémoire de Master

Motivation

Les espaces complets fournissent un cadre de travail très intéressant vis à vis de l'existence de certains objets ou de la convergence de suites ou séries. En effet, il est en général difficile de prouver qu'une suite converge en utilisant la définition car cela demande au préalable d'avoir déterminé cette-dernière, ce qui n'est , en général, pas évident. Par contre, étant-donnée une suite, on peut plus facilement montrer qu'elle est de Cauchy. De plus, travailler dans ces espaces assure donc de nombreux résultats d'existence dont nous allons parler dans ce mémoire. Enfin, tout espace métrique peut être complété en un espace complet, dans la pratique on peut facilement se placer dans ce contexte.

Table des matières

I Complétude dans un espace métrique2

I.A Suites de Cauchy

I.B Premières propriétés

I.C Théorèmes de point fixe

I.D Prolongements d'applications

II Complétude dans un espace vectoriel normé8

II.A Définitions et premières propriétés

II.B Prolongement d'applications linéaires

II.C Conséquences du théorème de Baire

III Complétude dans un espace de Hilbert13

III.A Théorème de projection et conséquences

III.B Bases orthonormées

IV Cas des espaces L^p 16

IV.A Définitions et premières propriétés

IV.B Réflexivité, séparabilité et dual

IV.C Etude du cas $p = 1$

IV.D Etude du cas $p = +\infty$

V Conclusion19

Soit (X, d) un espace métrique.

I Complétude dans un espace métrique

La notion de complétude étant liée aux suites de Cauchy, nous proposons dans cette partie une courte étude de ces-dernières et des conséquences d'être une telle suite .

I.A) Suites de Cauchy

Définition 1 – Suite de Cauchy

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq n_0, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

On en déduit par la définition des premières propriétés intéressantes :

Proposition 2

1. Toute suite convergente est de Cauchy.

2. Une suite de Cauchy est bornée et $\sup_{p,q} d(u_p, u_q) < +\infty$.

3. Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ .

Démonstration. 1. **Toute suite convergente est de Cauchy.**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers $x \in X$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, pour tout $p, q \geq n_0$:

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que (x_n) est de Cauchy.

2. Une suite de Cauchy est bornée.

Soit (x_n) une suite de Cauchy. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, $d(x_p, x_q) \leq 1$. Posons

$$M = \max\{d(x_0, x_{n_0}), d(x_1, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\} + 1.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq M,$$

donc (x_n) est bornée et en particulier $\sup_{p,q} d(x_p, x_q) < +\infty$.

3. Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge.

Soit (x_n) une suite de Cauchy et soit ℓ une valeur d'adhérence. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_1 tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ pour tout $n, m \geq n_1$. Comme ℓ est valeur d'adhérence, il existe φ une extractrice il existe n_2 tel que $\forall \varphi(n) > n_2$ $d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon/2$. Alors, pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$:

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

car $\varphi(n) \geq n > n_2$.

Ainsi (x_n) converge vers ℓ .

□

Définition 3

X est dit complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.

Exemple 4

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Contre-exemple 5

Cependant $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet, en effet considérons la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Cette suite est de Cauchy, en effet :

$$\begin{aligned} u_{n+p} - u_p &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)} \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^i} \leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

Or la suite $(\frac{1}{n!n})_n$ converge vers 0, donc la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, d)$

Supposons que cette suite converge dans $\mathbb{Q}$, on note $r = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge b = 1$ car $r > 0$. La suite $(u_n)_n$ étant strictment croissante, $u_n < r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On choisit un entier $n > b$. Pour tout $p \geq 1$, $u_{n+p} - u_p < \frac{1}{n!n}$ ainsi lorsque p tend vers $+\infty$, on a $0 < r - u_n \leq \frac{1}{n!n}$ (1). Or pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k! \mid n!$, on obtient, en réduisant la somme qui définit u_n au même dénominateur, un entier $c \geq 1$ tel que $u_n = \frac{c}{n!}$. D'autre part, $b \mid n!$ (car $n > b$), donc $r = \frac{d}{n!}$ où $d \in \mathbb{N}^*$. On a alors $r - u_n = \frac{d-c}{n!}$, donc par (1), on a $d - c \in \mathbb{N}^*$ et que $\frac{d-c}{n!} \geq \frac{1}{n!n}$ donc $d - c \leq \frac{1}{n}$. Or $n > b \geq 1$ donc $n \geq 2$, ce qui montre que $d - c \leq \frac{1}{2}$, en contradiction avec le fait que $d - c \in \mathbb{N}^*$.

Contre-exemple 6

$(\mathbb{R}, d)$ où $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ n'est pas complet. En effet elle définit la même topologie que $|\cdot|$ pourtant la suite $(n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy mais diverge. Ainsi la notion d'être de Cauchy est une notion fondamentalement métrique.

Théorème 7 – Complété d'un espace métrique

Il existe un espace métrique complet $(\widehat{X}, \widehat{d})$ et une isométrie $i : (X, d) \longrightarrow (\widehat{X}, \widehat{d})$ d'image dense.

De plus, si $(\widehat{X}_0, \widehat{d}_0)$ et i_0 conviennent également, alors il existe une isométrie bijective $\varphi : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}_0$ telle que

$$\varphi \circ i = i_0.$$

Démonstration. On prouve d'abord l'existence d'un complété :

On pose $X' = S(X)/\sim$ avec $S(X)$ l'ensemble des suites de Cauchy de X et $\sim$ la relation d'équivalence : $(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Posons π la surjection canonique de $S(X) \rightarrow X'$. On pose d' la distance sur X' définie par $d'(\pi((x_n)_n), \pi((y_n)_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n)$. Montrons que d' est bien définie.

1. Existence : Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de Cauchy de X , on a $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \leq d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q) \rightarrow 0$. Ainsi la suite $(d(x_n, y_n))_n$ est de Cauchy donc converge.

2. Indépendance du choix du représentant : Soient $(x_n)_n, (y_n)_n, (x'_n)_n, (y'_n)_n$ des suites de Cauchy de X tels que $(x_n)_n \sim (x'_n)_n$ et $(y_n)_n \sim (y'_n)_n$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0$ donc la définition ne dépend pas du choix du représentant.
3. Enfin, il est clair que d' est symétrique car d l'est ; il est clair que d' vérifie l'inégalité triangulaire et est positive car d est une distance et croissance de la limite. Enfin, si $d'(\pi(x_n)_n, \pi(y_n)_n) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$ donc $(x_n)_n \sim (y_n)_n$ donc $\pi((x_n)_n) = \pi((y_n)_n)$.

De plus X s'injecte isométriquement et densément dans (X', d') . On pose $I : X \rightarrow X', x \mapsto \pi((x, \dots, x, \dots))$. C'est bien une isométrie car $\forall x, y \in X, d'(I(x), I(y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, y) = d(x, y)$. $I(X)$ est dense dans X' . En effet soient $p \in \mathbb{N}$ et $\pi((x_n)_n) \in X'$, on a $d'(\pi((x_n)_n), I(x_p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_p) = d_p$ avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} d_p = 0$ car les suites sont de Cauchy.

Il reste à montrer que (X', d') est complet. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X', d') . Comme $I(E)$ est dense dans $\widehat{E}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut choisir $x_n \in E$ tel que

$$\widehat{d}(\alpha_n, I(x_n)) \leq \frac{1}{n+1}.$$

On considère la classe d'équivalence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; notons cette classe $\beta \in X'$ (ou, de façon équivalente, notons β l'élément de X' représenté par la suite $(I(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$). Alors, pour tout n ,

$$d'(\alpha_n, \beta) \leq d'(\alpha_n, I(x_n)) + d'(I(x_n), \beta) \leq \frac{1}{n+1} + d'(I(x_n), \beta).$$

Montrons que la suite $(d'(I(x_n), \beta))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. D'après la définition de β (classe de la suite (x_n)), il suffit de montrer que la suite $(I(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') . Or, comme I est une isométrie, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_p, x_q) = d'(I(x_p), I(x_q)) \leq d'(I(x_p), \alpha_p) + d'(\alpha_p, \alpha_q) + d'(I(x_q), \alpha_q).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. La suite (α_n) étant de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$ on ait

$$d'(\alpha_p, \alpha_q) \leq \varepsilon.$$

De plus, comme $d'(\alpha_n, I(x_n)) \leq \frac{1}{n+1}$, on peut choisir N_0 assez grand pour que pour tout $n \geq N_0$ on ait $d'(\alpha_n, I(x_n)) \leq \varepsilon$. En prenant $N' = \max\{N, N_0\}$, on obtient pour $p, q \geq N'$,

$$d(x_p, x_q) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Ainsi (x_n) est une suite de Cauchy dans E , donc $(I(x_n))$ est de Cauchy dans X' , et la quantité $d'(I(x_n), \beta)$ tend bien vers 0. En revenant à l'inégalité précédente on en déduit que

$$d'(\alpha_n, \beta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Autrement dit, la suite (α_n) converge dans X' vers β . Comme (α_n) était une suite de Cauchy arbitraire, (X', d') est complet. $\square$

Remarque 8

Ainsi on peut toujours se ramener au cas complet quitte à considérer nos objets dans le complété de notre espace de base.

I.B) Premières propriétés

Ici, nous nous intéresserons qu'au cas des espaces métriques, nous allons en déduire toutes les propriétés intrinsèques. Nous pourrions ainsi les utiliser dans les espaces vectoriels normés qui sont également des espaces métriques.

Proposition 9

Si (X, d) est un espace métrique et $A \subset X$ une partie complète de X . Alors A est fermée dans X si et seulement si A est complète pour la distance induite.

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A convergente dans X . Alors la suite $(x_n)_n$ est convergente donc est de Cauchy et est à valeurs dans A comme A est complet elle converge dans A . Par unicité de la limite, la limite est dans A . $\square$

Proposition 10

Soit (X, d) un espace métrique complet et $A \subset X$. Si A est fermé dans X alors (A, d) est complet.

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de A comme X est complet, la suite $(x_n)_n$ est convergente dans X et comme A est fermée cette limite est dans A . Ainsi (A, d) est complet. $\square$

Proposition 11

Soient (X_i, d_i) , $1 \leq i \leq n$, des espaces métriques. Alors $\prod_{i=1}^n X_i$ est complet pour la distance produit si et seulement si tous les (X_i, d_i) sont complets.

En particulier, un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Les prochains théorèmes nous seront très utiles pour la suite de ce mémoire, nous les considérons dans cette partie car ne nécessitent que des notions élémentaires :

Théorème 12 – Théorème des fermés emboîtés

Si X est complet, alors pour toute suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre tend vers 0, on a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \text{ est un singleton.}$$

Démonstration. On pose $\Gamma = \bigcap_n F_n$. Alors Γ est non-vide, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in F_n$. Comme le diamètre des F_n tend vers 0, on remarque que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. Comme X est complet, la suite $(x_n)_n$ converge dans X . Comme les F_p ont fermés et que $x_n \in F_p \forall n \geq p$, on en déduit que la limite l de cette suite est dans F_p pour tout p et donc appartient à Γ . Le diamètre des fermés tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que Γ a au plus un élément. $\square$

Théorème 13 – Théorème de Baire

Soit X est un espace métrique complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est encore dense dans X . Ou encore toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vides est encore d'intérieur vide.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans X . Pour montrer que $\bigcap_n O_n$ est dense dans X , il faut montrer que $\forall V$ ouvert non vide de E , $V \cap [\bigcap_n O_n] \neq \emptyset$. Soit donc V un ouvert non vide de X . Par récurrence, on va construire une suite $(B_n)_n$ de boules fermées de E telles que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, B_n est une boule fermée de rayon non nul et inférieur à $\frac{1}{2^n}$.
2. $B_0 \subset O_0 \cap V$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$.

L'ouvert O_0 est dense dans X donc $O_0 \cap V \neq \emptyset$ avec $O_0 \cap V$ ouvert, il existe donc une boule ouverte $B(x_0, r) \subset O_0 \cap V$. On note alors $B_0 = B_f(x_0, \min(\frac{r}{2}, 1))$, on a $B_0 \subset O_0 \cap V$.

On suppose les boules $B_0, \dots, B_n$ construites et vérifiant (1) et (2). L'ouvert O_{n+1} est dense dans X donc $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n \neq \emptyset$ est un ouvert non vide donc il existe une boule fermée $B_f(x, r)$ incluse dans $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$. On pose $B_{n+1} = B_f(x, \min(r/2, \frac{1}{2^{n+1}})) \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$. Ainsi B_{n+1} vérifie (1) et (2).

Par construction, $(B_n)_n$ est une suite décroissante de fermé non vides de X dont le diamètre tend vers 0. Comme X est complet, on peut appliquer le théorème des fermés emboîtés. Il existe donc $x \in X$ tel que $\bigcap_n B_n = \{x\}$. Or $B_0 \subset V$ donc $x \in V$. De plus par (2), $B_n \subset O_n$ donc $x \in O_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi $x \in \bigcap_n O_n$. Ainsi $V \cap [\bigcap_n O_n] \neq \emptyset$. $\square$

Corollaire 14

Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_n$ une suite de fermés de X telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n soit d'intérieur non-vidé.

Démonstration. Par l'absurde supposons que F_n est d'intérieur vide pour tout entier n . Le théorème de Baire assure alors que $\bigcup_n F_n = X$ est d'intérieur vide, ce qui est absurde. $\square$

I.C) Théorèmes de point fixe

Les espaces complets permettent d'affirmer l'existence de certains objets vérifiant des propriétés particulières. L'une des premières utilisations est l'existence de points fixes. L'idée générale est de montrer qu'une certaine suite est de Cauchy et donc converge. Par un choix judicieux d'espaces d'applications, on montre que la limite vérifie les propriétés souhaitées.

Soit $f : X \rightarrow X$.

Définition 15

On dit que f est contractante si f est k -lipschitzienne avec $k < 1$ ie $\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Théorème 16 – Théorème du point fixe de Banard

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $f : X \rightarrow X$ une application k -contractante. Alors f admet un unique point fixe $x \in X$ et, pour tout $x_0 \in X$, la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers x . De plus, on a l'estimation

$$d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Démonstration. On fixe $x_0 \in X$. On définit la suite $(x_n)_n$ par $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate assure que $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Ainsi lorsque $p < q$ on a :

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{i=p}^{q-p-1} d(x_{p+i}, x_{p+i+1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{i=p}^{q-p-1} k^i \leq d(x_1, x_0) \times \sum_{i=p}^{+\infty} k^i \leq d(x_1, x_0) \times \frac{k^p}{1-k}$$

Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, comme X est complet, elle converge dans X . On note x sa limite. f étant lipschitzienne, elle est continue, donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x$. Ainsi x est un point fixe de f . Supposons que $y \in X$ soit un autre point fixe de f , on a donc $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ ou encore $d(x, y) \leq kd(x, y)$ ce est possible seulement si $d(x, y) = 0$ car $k > 0$. Ainsi $x = y$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ dans la première inégalité, on obtient bien que $d(x_p, x) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0)$. □

Remarque 17

La convergence est dite exponentielle.

Corollaire 18

Si f^p est contractante alors f admet un unique point fixe.

Démonstration. On peut appliquer le théorème du point fixe de Picard à f^p admet un unique point fixe que l'on note x_0 . Montrons que $f(x_0) = x_0$. On observe que $f^{p+1}(x_0) = f^p(f(x_0)) = f(f^p(x_0)) = f(x_0)$ ainsi $f(x_0)$ est un point de fixe f^p par unicité on a $f(x_0) = x_0$. □

Contre-exemple 19

Le théorème est faux si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Il suffit de prendre $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

Proposition 20

Si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ et X compact alors f admet un unique point fixe.

Démonstration. On généralise le théorème du point fixe de Picard dans un espace compact. On considère l'application $E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, f(x))$. Cette application est continue par composition d'applications continues, E étant compact on en déduit que f admet une borne inférieure et elle est atteinte. $\exists \alpha \in E, d(\alpha, f(\alpha)) = \inf_{x \in E} d(x, f(x))$. Supposons que $f(\alpha) \neq \alpha$. On pose $\beta = f(\alpha)$.

On a alors $d(\beta, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = d(\alpha, f(\alpha))$ ce qui contredit la définition de α . Ainsi $f(\alpha) = \alpha$ et f admet un point fixe. Il est unique d'après l'inégalité vérifiée par f . □

Application 21

Soit $(t_0, y_0, \alpha, \beta, r_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \times [0, +\infty[\times]0, +\infty]$, $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$, et $f : I \times \bar{B}(y_0, r_0) \rightarrow \mathbb{C}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.

Définissons l'application

$$\varphi : y \in C(I, \bar{B}(y_0, r_0)) \longmapsto \left(t \in I \mapsto \varphi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right).$$

Si $\varphi(C(I, \bar{B}(y_0, r_0))) \subset C(I, \bar{B}(y_0, r_0))$, alors il existe une unique solution globale de

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Théorème 22 – Théorème de Cauchy-Lipschitz globale

Si f continue et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t, y), y(t_0) = t_0$

Exemple 23

La fonction $\cos$ est 1-lipschitzienne, donc $y' = \cos(y), y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple 24

Le caractère lipschitzien global est fondamental, on considère

I.D) Prolongements d'applications

Théorème 25

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, $A \subset X$ dense, et $f : A \rightarrow Y$ uniformément continue. Si Y est complet, alors f se prolonge de manière unique en une application continue

$$\tilde{f} : X \rightarrow Y,$$

et de plus $\tilde{f}$ est uniformément continue.

Démonstration. Soit $x_0 \in X \setminus A$. Montrons que $\lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$ existe. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur A :

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq \alpha \implies \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

En particulier, si $x, y \in A$ tels que $d(x, x_0) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $d(y, x_0) \leq \frac{\alpha}{2}$, on a $d(x, y) \leq \alpha$ donc $\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. On en déduit par le critère de Cauchy ((Y, δ) est complet) pour les fonctions que $\lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$ existe.

D'après ce qui précède, la fonction g définie sur E par $\forall x \in A, g(x) = f(x)$ et $\forall x \in X \setminus A, g(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$ est continue. Il reste à prouver qu'elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On sait que f est uniformément continue sur A donc

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq \alpha \implies \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Soit $(x, y) \in X^2$ tel que $d(x, y) \leq \alpha$. Comme A est dense dans X , il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de points de A tendant respectivement vers x et y . La distance étant continue, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y) \leq \alpha$. Ainsi $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \alpha, \forall n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N, \delta(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient que $\delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. Ceci prouve que g est uniformément continue. L'application limite étant unique, en effet si on considère $g, h : E \rightarrow Y$ deux applications continues telles que $g|_A = h|_A$. On a donc $\forall x \in A, g(x) = h(x)$. Pour $x \in X \setminus A$, par densité de A , il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers x . Par continuité de g et h on a :

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n), \text{ de même } h(x) =$$

Soit $(x, y) \in X^2$ tel que $d(x, y) \leq \alpha$. Comme A est dense dans X , il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de points de A tendant respectivement vers x et y . La distance étant continue, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y) \leq \alpha$. Ainsi $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \alpha, \forall n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N, \delta(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient que $\delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. Ceci prouve que g est uniformément continue. L'application limite étant unique, en effet si on considère $g, h : E \rightarrow Y$ deux applications continues telles que $g|_A = h|_A$. On a donc $\forall x \in A, g(x) = h(x)$. Pour $x \in X \setminus A$, par densité de A , il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers x . Par continuité de g et h on a :

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n), \text{ de même } h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

Enfin, l'unicité découle du fait qu'une application uniformément continue est continue.

□

Contre-exemple 26

La continuité seule ne suffit pas! En effet : Soit

$$X = [0, 1], \quad A = [0, 1[, \quad \text{et} \quad f : x \in A \mapsto \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}.$$

Alors A est dense dans X et f est continue sur A , mais f ne se prolonge pas par continuité sur X , car

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

II Complétude dans un espace vectoriel normé

Après l'étude des espaces métriques complets, la prochaine structure qu'il semble naturel d'étudier est celle des espaces vectoriels normés, qui sont encore des espaces métriques. Dans cette partie, nous allons voir que ce cadre impose des conséquences fortes sur des objets vérifiant peu d'hypothèses, et qui seraient difficiles à montrer sans le bagage de la théorie des espaces de Banach.

II.A) Définitions et premières propriétés

On se propose ici de montrer les premières propriétés élémentaires des espaces de Banach.

On considère $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Définition 27 – Espace de Banach

Un espace de Banach est un espace vectoriel complet pour la distance induite par sa norme.

Définition 28

L'application $f \in \mathcal{L}_c(E, F) \mapsto \|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$

Proposition 29

Si F est un espace de Banach alors $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Démonstration. On considère $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$. On a donc pour $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, p \geq n_0, \|f_n - f_p\| \leq \varepsilon$. Soit $x \in E$, on a alors que la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de F en effet, $\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \|f_n - f_p\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\| \leq \tilde{\varepsilon}$ (*), qui est complet donc elle converge dans F on note $f(x)$ cette limite.

On peut donc définir une application $E \rightarrow F$, en posant $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Comme chaque f_n est linéaire, on en déduit par unicité de la limite que f est aussi linéaire. Il reste à vérifier que f est continue et que la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la norme d'opérateur associée.

Soit $x \in E$, en passant à la limite dans (*) lorsque p tend vers $+\infty$ on en déduit que $\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x)\| \leq (\varepsilon + \|f_n\|) \|x\|$ donc f est continue et donc on a $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$. Ainsi $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. $\square$

Corollaire 30

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un espace de Banach. Autrement dit, le dual d'un espace vectoriel normé est toujours complet.

Proposition 31

Dans un espace de Banach, une suite converge si et seulement si elle est absolument convergente.

Remarque 32

La réciproque est un critère pratique, pour montrer qu'une série converge, on peut montrer qu'elle converge absolument. Par exemple, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on définit $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$, cette série est convergente car elle converge absolument et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Banach.

Application 33

La convergence normale d'une série de fonctions bornées à valeurs dans un espace de Banach implique la convergence uniforme.

Application 34

Soit E un espace de Banach, si $u \in L(E)$ est tel que $\|u\| \leq 1$, alors $(\text{Id} - u) \in GL(E)$ et son inverse est

$$(\text{Id} - u)^{-1} = \sum_{n \geq 0} u^n.$$

On en déduit que $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$.

Proposition 35

Tout espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach. En particulier, tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé quelconque est fermé.

II.B) Prolongement d'applications linéaires

Si on s'intéresse à la transformée de Fourier, on remarque qu'elle est bien définie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même pourtant en physique les fonctions rencontrées ne sont pas, en général, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il a donc fallu pouvoir prolonger la transformée de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui est possible d'après le théorème de prolongement des applications linéaires.

Théorème 36

Soient E un espace normé, F un espace de Banach, H un sous-espace vectoriel de E dense dans E , et $f \in \mathcal{L}(H, F)$. Alors il existe un unique $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E, F)$ prolongeant f . De plus, on a

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Application 37

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ à décroissance rapide. On définit les transformations de Fourier :

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\xi \cdot x} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\xi \cdot x} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

qui sont des applications linéaires continues $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et inverses l'une de l'autre.

Alors, les transformations de Fourier $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ se prolongent de façon unique en des isométries inverses l'une de l'autre de

$$L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

II.C) Conséquences du théorème de Baire

Dans cette sous-section, on se propose d'étudier quelques conséquences du théorème de Baire. Le théorème de Baire permet d'affirmer des résultats dont les hypothèses nécessaires se vérifient facilement, c'est le cas du théorème de Banach-Steinhaus.

On considère E, F deux espaces de Banach.

Proposition 38

Un espace vectoriel normé E admettant une base dénombrable n'est pas complet. Ainsi un espace vectoriel normé complet admet une base finie ou une base non-dénombrable.

Démonstration. Soit $(e_n)_n$ une base dénombrable de E . On pose $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Alors chaque F_n est fermé car de dimension finie. On observe que chaque F_n est d'intérieur vide, en effet s'il existe une boule ouverte $B(x, r) \subset F_n$ avec $r > 0$, comme $x \in F_n$, on en déduit que $B(0, r) \subset F_n$ est incluse dans F_n or F_n étant invariant par homothétie on aurait $E \subset F_n$ ce qui est absurde. Si E est complet le théorème de Baire assure que $E = \bigcup_n F_n$ est d'intérieur vide : absurde. $\square$

Théorème 39 – Banach-Steinhaus

Développement 2a) : Soit $(T_i)_{i \in I} \subset \mathcal{L}(E, F)$ une famille d'opérateurs linéaires bornés entre espaces normés. Si pour tout $x \in E$ on a

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < +\infty,$$

alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons

$$\Omega_k = \left\{ x \in E : \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k \right\}.$$

L'ensemble Ω_k est ouvert. En effet, si $x_0 \in \Omega_k$, il existe $f \in H$ tel que $\|f(x_0)\| > k$. Comme f est continue, il existe $\rho > 0$ tel que

$$\|f(x)\| > k \quad \text{dès que} \quad \|x - x_0\| < \rho.$$

Ainsi, la boule $B(x_0, \rho)$ est contenue dans Ω_k .

On se retrouve alors confronté à deux cas :

— Si chaque Ω_k est dense dans E , alors, comme E est complet, le théorème de Baire assure que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$$

est dense dans E , en particulier non vide. Si l'on choisit $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$, alors

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty.$$

Sinon, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E . En d'autres termes, il existe $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que

$$B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \emptyset.$$

Ainsi, pour tout $x \in B(x_0, \rho)$,

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\| \leq k.$$

On en déduit que, pour tout $x \in B(x_0, \rho)$ et pour tout $f \in H$,

$$\|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leq \|f(x + x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq 2k.$$

Par continuité de chaque $f \in H$, cette inégalité reste vraie sur la boule fermée $B_f(0, \rho)$. Ainsi, pour tout $f \in H$, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$,

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho} \|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho}.$$

Ainsi, pour tout $f \in H$,

$$\|f\| \leq \frac{2k}{\rho},$$

d'où le résultat. □

Application 40

Développement 2b) : Il existe $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ne coïncidant pas avec sa série de Fourier

Démonstration. On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques et continues. Pour tout $f \in C_{2\pi}$, on note

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application

$$\ell_n : C_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto \sum_{p=-n}^n c_p(f).$$

On munit $C_{2\pi}$ de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que ℓ_n est une forme linéaire continue et calculons sa norme.

On a clairement que ℓ_n est une application linéaire. Soit $f \in C_{2\pi}$.

$$\ell_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{p=-n}^n e^{-ipt} \right) dt.$$

On veut calculer la somme présente dans l'intégrale. On a :

$$\sum_{p=-n}^n e^{ipt} = e^{-int} \sum_{p=-n}^n e^{i(p+n)t} = e^{-int} \sum_{p=0}^{2n} e^{ipt}.$$

Or,

$$\sum_{p=0}^{2n} e^{ipt} = \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}}.$$

Donc,

$$\sum_{p=-n}^n e^{ipt} = e^{-int} \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

En réinjectant dans $\ell_n(f)$, on obtient :

$$\ell_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} f(t) dt.$$

Si $\|f\|_{\infty} = 1$,

$$|\ell_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt$$

Posons, pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{\varepsilon}(t) = \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}$.

On a bien $f_{\varepsilon} \in C_{2\pi}$ car $D_n \in C_{2\pi}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$D_n(t + 2\pi) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t + 2\pi)\right)}{\sin\left(\frac{t+2\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t + (2n+1)\pi\right)}{\sin\left(\frac{t}{2} + \pi\right)} = D_n(t).$$

De plus, $\|f_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq 1$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\ell_n(f_{\varepsilon})| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \right| \left| \frac{1}{\sin(t/2)} \right| dt.$$

Ainsi, avec (*),

$$\|l_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \right| \left| \frac{1}{\sin(t/2)} \right| dt,$$

et l_n est linéaire continue.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|l_n\| = +\infty$ et concluons.

On sait que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(t/2)| \leq |t/2|.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|l_n\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)|}{|t/2|} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)|}{t/2} dt.$$

En posant $u = \left(n + \frac{1}{2}\right)t$, $du = \left(n + \frac{1}{2}\right)dt$, on obtient

$$\|l_n\| \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du.$$

Or cette intégrale diverge. En effet,

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u} du = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(u)}{u} du \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(u)| du.$$

Comme

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(u)| du \geq \int_0^{\pi} \sin(u) du = [-\cos(u)]_0^{\pi} = 2,$$

on obtient

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi}.$$

Cette série diverge. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|l_n\| = +\infty.$$

Comme $C_{2\pi}$ est complet (car c'est un fermé de $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, qui est complet), on peut appliquer le théorème de Banach–Steinhaus.

Il existe donc $f \in C_{2\pi}$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |l_n(f)| = +\infty.$$

Ainsi, la série de Fourier de f en 0 diverge. La fonction f est donc différente de sa série de Fourier. Il existe donc des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas vers la fonction. □

Corollaire 41

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$T_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(x).$$

Alors :

1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$,
2. $T \in \mathcal{L}(E, F)$,
3. $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Autrement dit, entre deux espaces de Banach, une limite simple d'applications linéaires continues bornées est linéaire continue.

Théorème 42 – Théorème de l'application ouverte

Si $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ surjective alors T est ouverte

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$F_n = T[B(nr)],$$

qui est un fermé de F . Comme T est surjective,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = F.$$

D'après le théorème de Baire, il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte $B(x, \rho)$ de centre x et de rayon $\rho > 0$ incluse dans F_n .

On a alors

$$B(0, \rho) \subset F_{2n}.$$

En effet, donnons-nous $y \in B(x, \rho) \subset F_n$. Il existe deux suites (x_p) et (y_p) dans $B(nr)$ telles que

$$x = \lim_{p \rightarrow +\infty} T(x_p) \quad \text{et} \quad y = \lim_{p \rightarrow +\infty} T(y_p).$$

Donc

$$y - x = \lim_{p \rightarrow +\infty} T(y_p - x_p),$$

et comme pour tout p , $y_p - x_p \in B(2nr)$, on en déduit

$$y - x \in F_{2n}.$$

Ceci est vrai pour tout $y \in B(x, \rho)$, donc

$$B(0, \rho) \subset F_{2n}.$$

Finalement, on a

$$B\left(0, \frac{\rho}{2n}\right) = \frac{1}{2n} B(0, \rho) \subset \frac{1}{2n} F_{2n} = T[B(r)],$$

Ainsi $\forall r > 0$, $\overline{T(B(r))}$ est un voisinage de 0 dans F .

Soit $r > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$V_n = B\left(\frac{r}{2^n}\right).$$

Montrons que

$$T(V_1) \subset T(V_0).$$

Soit $y_1 \in T(V_1)$. Comme $T(V_2)$ est un voisinage de 0 d'après la question précédente, on a

$$T(V_1) \subset T(V_1) + T(V_2),$$

donc il existe $x_1 \in V_1$ et $y_2 \in T(V_2)$ tels que

$$y_1 - y_2 = T(x_1).$$

En itérant le procédé, on construit ainsi deux suites (y_n) de F et (x_n) de E telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in T(V_n), \quad x_n \in V_n \text{ et } y_n - y_{n+1} = T(x_n).$$

Pour tout n , $x_n \in V_n$, donc $\|x_n\| < r/2^n$, ce qui implique que $\sum \|x_n\|$ converge. Comme E est complet, x_n converge. On note

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

En écrivant pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$T\left(\sum_{n=1}^N x_n\right) = \sum_{n=1}^N T(x_n) = \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{N+1},$$

et en faisant tendre $N \rightarrow +\infty$, on obtient $T(x) = y_1$ (car T est continue et $y_N \rightarrow 0$).

Comme pour tout n , $\|x_n\| < r/2^n$, on a $\|x\| < r$. Finalement, $y_1 \in T(V_0)$.

On remarque alors que $T[B(r)]$ est un voisinage de 0 pour tout $r > 0$. Donc si U est un voisinage de 0, $T(U)$ est un voisinage de 0.

Considérons maintenant un ouvert Ω de E et $x \in \Omega$. L'ensemble $\Omega - x$ est un voisinage de 0, donc $T(\Omega - x)$ est un voisinage de 0, et

$$T(\Omega) = T(\Omega - x) + T(x)$$

est un voisinage de $T(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \Omega$, on en déduit que $T(\Omega)$ est ouvert.

□

Théorème 43 – Théorème d'isomorphisme de Banach

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ bijective alors $T^{-1} \in \mathcal{L}_c(F, E)$.

Démonstration. Conséquence directe du théorème de l'application ouverte.

□

Corollaire 44

Si E est de Banach pour deux normes comparables alors ces normes sont équivalentes.

Conclusion : On observe que le théorème de Baire permet de prouver des propriétés fortes sur certains objets qu'il semblerait difficile de montrer à la main. Ainsi, le cadre des espaces de Banach permet d'éviter la partie ardue de théorèmes difficiles.

III Complétude dans un espace de Hilbert

III.A) Théorème de projection et conséquences

Dans cette section, on augmente davantage les contraintes des espaces dans lesquels on travaille. La complétude liée à la norme associée à un produit scalaire permet de prouver davantage de résultat.

Définition 45 – Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Théorème 46 – Théorème de projection sur un convexe fermé non- vide

Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H , et soit $x \in H$. Alors il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que

$$d(x, C) = \|x - p_C(x)\|.$$

De plus, pour $y \in H$, on a la caractérisation suivante :

$$y = p_C(x) \iff \left(y \in C \text{ et } \forall z \in C, \Re \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \right) \text{ (Condition de l'angle obtu).}$$

Démonstration. Soient C un convexe fermé non vide de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espace hilbertien et $x \in H$.

Existence du projeté :

Par définition de

$$\delta = \inf_{z \in C} \|x - z\|_H^2,$$

il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x - c_n\|_H^2 \leq \delta + \frac{1}{n}.$$

Par l'identité du parallélogramme, on a pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N})^2$:

$$\left\| x - \frac{c_n + c_p}{2} \right\|_H^2 + \|c_n - c_p\|_H^2 = \frac{1}{2} (\|x - c_n\|_H^2 + \|x - c_p\|_H^2) \quad (*)$$

Donc :

$$\|c_n - c_p\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{1}{n} + \delta + \frac{1}{p} \right) - \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right).$$

Ainsi, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(H, \|\cdot\|_H)$ qui est complet, donc (c_n) converge vers une limite $c \in C$ (car C est fermé). En passant à la limite dans la première inégalité, on obtient

$$\|x - c\|_H^2 = \delta.$$

Unicité du projeté :

S'il existe $c, c' \in C$ qui atteignent δ , alors d'après $(*)$:

$$\|c - c'\|_H^2 \leq 0.$$

Donc $\|c - c'\|_H^2 = 0$, soit $c = c'$: l'unicité est démontrée.

Caractérisation du projeté :

On note c l'unique point de C tel que pour tout $x \in H$, $d(x, C) = \|x - c\|_H$. Soit $z \in C$.

Pour tout $t \in]0, 1]$, $(1 - t)c + tz \in C$ (car C est convexe). On a alors :

$$\|x - ((1 - t)c + tz)\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2 \implies \|x - c + t(c - z)\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2$$

$$\implies \|x - c\|_H^2 + 2t \Re \langle x - c, c - z \rangle_H + t^2 \|c - z\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2$$

$$\implies 2t \Re \langle x - c, z - c \rangle_H \leq t^2 \|c - z\|_H^2$$

$$\implies \Re \langle x - c, z - c \rangle_H \leq \frac{t}{2} \|c - z\|_H^2.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient :

$$\Re \langle z - c, x - c \rangle_H \leq 0.$$

Réciproquement, supposons que $c \in C$ vérifie cette inégalité. Alors pour tout $z \in C$:

$$\|x - z\|_H^2 = \|(x - c) + (c - z)\|_H^2 = \|x - c\|_H^2 + 2 \Re \langle x - c, c - z \rangle_H + \|c - z\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2.$$

Montrons que P_C est 1-lipschitzienne :

Soient $x, x' \in H$ et posons $y = P_C(x)$ et $y' = P_C(x')$.

Alors :

$$\|y - y'\|_H^2 = \langle y - y', y - y' \rangle_H = \langle y - y', y - x \rangle_H + \langle y - y', x - x' \rangle_H + \langle y - y', x' - y' \rangle_H.$$

Or,

$$\Re \langle y - y', y - x \rangle_H \leq 0, \quad \Re \langle y - y', x' - y' \rangle_H \leq 0,$$

par la caractérisation précédente du projeté.

De plus, par Cauchy-Schwarz,

$$\Re \langle y - y', x - x' \rangle_H \leq |\langle y - y', x - x' \rangle_H| \leq \|y - y'\|_H \|x - x'\|_H.$$

Ainsi :

$$\|y - y'\|_H^2 = \Re \left(\langle y - y', y - x \rangle_H + \langle y - y', x - x' \rangle_H + \langle y - y', x' - y' \rangle_H \right) \leq \|y - y'\|_H \|x - x'\|_H.$$

Donc :

$$\|P_C(x) - P_C(x')\|_H \leq \|x - x'\|_H,$$

et ainsi P_C est 1-lipschitzienne (et donc continue). □

Corollaire 47

Soit C convexe fermé non vide de H , alors $p_C : H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

Si on projette sur un sous-espace vectoriel fermé, on a une caractérisation plus confortable du projeté :

Théorème 48 – Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel fermé

Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H . Alors l'application de projection orthogonale

$$p_F : H \longrightarrow F$$

est linéaire et continue, i.e. $p_F \in \mathcal{L}(H, F)$.

De plus, pour $x \in H$ et $y \in H$, on a la caractérisation :

$$y = p_F(x) \iff (y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp).$$

De plus, on a $H = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$

Démonstration. Il est clair que

$$F \cap F^\perp = \{0\},$$

car si $\langle x, x \rangle = 0$, on a $x = 0$.

Montrons maintenant que

$$F \oplus F^\perp = H.$$

Soit $x \in H$. Comme F , sous-espace fermé de H , est un convexe fermé de H , on peut appliquer les résultats de la projection sur un convexe fermé. Donc il existe un unique élément $x_F \in F$ tel que

$$\|x - x_F\| = d(x, F),$$

et on a

$$\forall z \in F, \quad \langle z - x_F, x - x_F \rangle \leq 0.$$

Comme F est un sous-espace vectoriel, il est symétrique par rapport à $x_F \in F$, et cette inégalité devient donc une égalité.

On en tire

$$\forall z \in F, \quad \langle z, x - x_F \rangle = \langle z - x_F, x - x_F \rangle - \langle 0 - x_F, x - x_F \rangle = 0,$$

donc $x - x_F \in F^\perp$.

En conclusion, on a

$$x = x_F + (x - x_F) \quad \text{avec } x_F \in F \text{ et } x - x_F \in F^\perp,$$

donc $x \in F \oplus F^\perp$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in H$, on a bien

$$H = F \oplus F^\perp.$$

De plus, on a montré que $x_F = p_F(x)$, ce qui prouve la caractérisation.

Il reste à montrer $F = F^{\perp\perp}$. Il est clair que

$$F \subset F^{\perp\perp},$$

car si $x \in F$, on a $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F^\perp$, donc $x \in F^{\perp\perp}$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in F^{\perp\perp}$. Comme $F \oplus F^\perp = H$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$ tel que

$$x = x_1 + x_2.$$

Or x est orthogonal à $F^\perp$, donc

$$\langle x_2, x \rangle = 0 = \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2,$$

donc $x_2 = 0$, et finalement $x = x_1 \in F$. On a donc

$$F^{\perp\perp} \subset F.$$

□

On a une caractérisation de la densité :

Corollaire 49

Soit F un sous-espace vectoriel de H , on a F dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\bar{F} = F^{\perp\perp}$. D'une part $F \subset F^{\perp\perp}$. D'autre part, on a

$$(F^\perp)^\perp \subset (F)^{\perp\perp} = F. \quad (***)$$

Par ailleurs, $F \subset F^{\perp\perp}$, et comme un orthogonal est fermé, $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$. Avec $(***)$ on en déduit

$$F = F^{\perp\perp}.$$

Ainsi comme $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé, on a $H = F^\perp \oplus F^{\perp\perp}$ donc $H = F^\perp \oplus \bar{F}$ donc $\bar{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$ $\square$

Application 50

Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 51 – Théorème de représentation de Riesz

Soit E un espace de Hilbert. Alors $\Phi : E \rightarrow E', y \mapsto \varphi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie surjective.

Démonstration. On considère l'application φ_y est une forme linéaire continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il est clair que Φ est linéaire, elle est injective car si $\Phi(a) = 0$ alors $\|a\|^2 = \varphi_a(a) = \langle a, a \rangle = 0$ donc $a = 0$. Il reste à prouver la surjectivité de l'application Φ . On considère $L \in E'$. Si $L = 0$ on prend $y = 0$ et on a bien $L = \varphi_0$. Si $L \neq 0$, son noyau est un sous-espace vectoriel fermé de E (L est continue). Le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel fermé nous assure que $E = \ker(L) \oplus \ker(L)^\perp$. Comme L est non nulle, on en déduit que L n'est pas nulle sur $\ker(L)^\perp$, ainsi il existe $a \in \ker(L)^\perp$ tel que $L(a) \neq 0$. On remarque alors que $\ker(L)^\perp = \text{Vect}(a)$, en effet on a $\text{Vect}(a) \subset \ker(L)^\perp$. Pour l'inclusion réciproque, on considère $v \in (\ker(L))^\perp$. On pose $w = v - \frac{L(v)}{L(a)}a$, on a alors $w \in (\ker(L))^\perp$ car c'est un sous-espace vectoriel, et on observe que $L(w) = 0$ donc $w \in \ker(L) \cap \ker(L)^\perp = \{0\}$ donc $w = 0$ donc $v = \frac{L(v)}{L(a)}a \in \text{Vect}(a)$. On pose alors $b = \frac{L(a)}{\|a\|^2}a$. Montrons que $\varphi_b = L$.

On a bien l'égalité des deux applications sur $\ker(L)$ car $a \in \ker(L)^\perp$. Puis si $x \in \ker(L)^\perp$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$ donc $\varphi_b(x) = \lambda \varphi_b(a) = \lambda \frac{L(a)}{\|a\|^2} \langle a, x \rangle = \lambda L(a) = L(\lambda a) = L(x)$. Ainsi L et φ_b coïncide sur $\ker(L)^\perp$ et $\ker(L)$ qui sont deux espaces supplémentaires donc $\varphi_b = L$, ce qui prouve la surjectivité de Φ . $\square$

Proposition 52

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, alors il existe une unique application linéaire $\nabla f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, \forall h \in E, df_x(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$

Proposition 53

Existence de l'adjoint

Les espaces de Hilbert fournissent un cadre de travail agréable car leur dual est facilement représenté et identifiable. On introduit les définitions suivantes pour davantage préciser les propriétés.

Définition 54

Soit X un espace vectoriel normé, on note X' son dual topologique (i.e. les formes linéaires continues de X dans le corps de base), on peut alors naturellement former le bidual topologique X'' , le dual de topologique de X' . Tout comme dans les espaces de Hilbert, toute forme linéaire peut être vu comme le produit scalaire contre un certain un vecteur, ainsi le dual est étroitement lié aux propriétés de l'ensemble considéré. Il semble alors naturelle de considérer l'application $J : X \rightarrow X''$ définie par $\forall x \in X, \forall \psi \in X', J(x)(\psi) = \psi(x)$.

Définition 55

Un espace est dit réflexif si l'application J est bijective.

Ainsi le théorème de représentation de Riesz nous permet d'affirmer :

Théorème 56

Tout espace de Hilbert est réflexif.

III.B) Bases orthonormées

L'intérêt des bases en particulier, celles hilbertiennes est d'exhiber les coordonnées dans cette base de chaque vecteur. Les théorèmes de cette partie affirmeront que l'on peut reconstituer le vecteur de base sachant ses coordonnées. Cette théorie s'illustre en analyse/traitement du signal, on calcule les premiers harmoniques et on reconstitue le signal initial.

Définition 57

Soit H un espace de Hilbert, on dit que $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de H si $(e_n)_n$ est une famille de vecteurs de H de norme 1 et deux à deux orthogonaux et si $\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans H .

Théorème 58

Soit H un espace de Hilbert. Si H est séparable ie (admet une partie dénombrable dense) alors H admet une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exemple 59

Si on note $L^2_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π -périodique de carré intégrable alors $(e^{2i\pi n \cdot})_n$ forment une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Proposition 60 – Inégalité de Bessel

Soit $(x_n)_n$ une famille orthonormale de H et $x \in H$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Théorème 61 – Théorème de Bessel-Parseval

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H un espace préhilbertien réel. Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :

1. la famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H ;
2. $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (**égalité de Bessel**)
3. $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$

Ainsi, si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H , l'application de H dans $l^2(I)$ définie par $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ est une isométrie linéaire. Cette isométrie est surjective si et seulement si H est un espace de Hilbert.

IV Cas des espaces L^p

IV.A) Définitions et premières propriétés

Dans cette section, nous nous intéressons aux des espaces L^p , en effet dans cette logique d'étude d'espaces de plus en plus abstraits, les espaces L^p semblent être un incontournable dans ce mémoire.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 62

Pour $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{lorsque } p \text{ est fini,} \quad \|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid |f| \leq M \text{ } \mu\text{-p.p.}\}.$$

Malheureusement ce sont des semi-normes, en effet l'axiome de séparation n'est pas vérifié. Il faut donc introduire un nouvelle espace pour le munir d'une structure d'espace vectoriel normé.

On définit l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}.$$

Définition 63

On note

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \{f \mid \|f\|_p = 0\}$$

(ou $L^p(X)$, ou L^p) l'ensemble des fonctions de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ quotienté par la relation d'égalité μ -p.p.

L'application $\|\cdot\|_p$ passe au quotient et définit ainsi une application sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, notée également $\|\cdot\|_p$ par abus de langage.

Exemple 64

Cas où $X = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage.

Si p est fini, on note l^p l'espace

$$l^p = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

On note l^∞ l'espace des suites bornées :

$$l^\infty = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_n |a_n| < +\infty \right\}.$$

Théorème 65 – Inégalité de Hölder

Soient $(p, q) \in [1, +\infty]$, soient $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$)

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

Remarque 66

Pour $p = q = \frac{1}{2}$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On remarque que l'inégalité de Hölder est une généralisation de cette dernière.

Corollaire 67 – Inégalité de Minkowski

Pour toutes fonctions $f, g \in L^p(X)$ on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Corollaire 68

$\|\cdot\|_p$ est une norme et l'espace $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

On arrive à un des premiers théorèmes importants de cette leçon concernant les espaces L^p :

Théorème 69 – Théorème de Riesz-Fisher

L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de **Banach**.

Corollaire 70

Toute suite convergente de L^p admet une sous-suite qui converge μ -p.p.

IV.B) Réflexivité, séparabilité et dual

Dans cette sous-section nous allons successivement étudier les trois cas : $p \in]1, +\infty[$, $p = 1$ et enfin $p = +\infty$.

Le premier cas est le cas le plus "facile" car le théorème suivant assure que L^p est réflexif pour $p \in]1, +\infty[$. Ainsi le dual

Théorème 71

L^p est réflexif pour $p \in]1, +\infty[$.

La preuve se décompose autour des points suivant :

Proposition 72 – Inégalité de Clarkson

Soit $p \in [2, +\infty[$, on a :

$$\forall f, g \in L^p, \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

Proposition 73

L'espace L^p est uniformément convexe :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\forall f, g \in L^p, \|f\|_p \leq 1, \|g\|_p \leq 1 \text{ et } \|f - g\|_p > \varepsilon) \implies \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p < 1 - \delta$$

Et enfin,

Proposition 74

L'espace L^p est réflexif pour $1 < p \leq 2$.

Pour avoir les détails, le lecteur pourra consulter l'excellent "Analyse fonctionnelle" de Haïm Brezis.

Théorème 75 – Théorème de représentation de Riesz

Soit $p \in]1, +\infty[$ et $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que $\forall f \in L^p, \langle \varphi, f \rangle = \int u f$.

De plus, on a $\|u\|_{p'} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$

Ce théorème est alors très important car on peut identifier de manière isométrique et surjectif le dual de L^p avec $L^{p'}$.

Théorème 76 – Densité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré alors l'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact de Ω est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Cet espace vérifie aussi d'autre propriété importante comme :

Théorème 77

L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $p \in [1, +\infty[$.

L'ensemble des théorèmes et propositions vues couvrent la majeure partie des propriétés fondamentales de ces espaces, on se propose maintenant de considérer les cas particulier $p = 1$ et $p = +\infty$.

IV.C) Etude du cas $p = 1$

Théorème 78

Soit $\varphi \in (L^1)'$. Alors il existe $u \in L^\infty$ unique tel que :

$$\forall f \in L^1, \langle \varphi, f \rangle = \int u f$$

On a de plus, $\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$

La preuve consiste à se ramener au cas $p = 2$.
Cependant contrairement au cas $p \in]1, +\infty[$:

Proposition 79

L'espace L^1 n'est pas réflexif

IV.D) Etude du cas $p = +\infty$

Théorème 80

L^∞ n'est pas réflexif

Démonstration. On a $L^\infty = (L^1)'$ mais si L^∞ était réflexif alors L^1 le serait aussi (on admet que le dual d'un espace réflexif est réflexif). $\square$

Théorème 81

L'espace L^∞ n'est pas séparable i.e. il ne contient pas de sous-ensemble dense et au plus dénombrable.

Ainsi le tableau suivant récapitule les propriétés vérifiées selon les valeurs de p :

Valeur de p	L^p réflexif ?	L^p séparable ?	$(L^p)'$
$p = 1$	Non	Oui	L^∞
$p \in [2, +\infty[$	Oui	Oui	$L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$p = +\infty$	Non	Non	contient strictement L^1

V Conclusion

En conclusion, la complétude apparaît comme une propriété fondamentale des espaces normés. Après avoir introduit cette notion et illustré ses premiers exemples, nous avons vu que les espaces de Banach, et en particulier les espaces de Hilbert, constituent un cadre naturel, confortable et robuste pour l'étude de la convergence et des opérateurs linéaires continus. La complétude y joue un rôle essentiel, en permettant l'application des grands théorèmes de structure de l'analyse fonctionnelle, tels que les théorèmes de Banach–Steinhaus, de l'application ouverte et du graphe fermé, qui fournissent des outils puissants pour l'étude qualitative des opérateurs. Enfin, nous avons pu illustrer la puissance et la mise en pratique de cette théorie pour le cas pratique et important des séries de Fourier. Dans une dernière partie nous nous consacrons à l'étude des espaces L^p majoritairement présent dans l'analyse contemporaine.

Références

- [1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.
- [2] X. Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses, 2^e édition, 2008.
- [3] B. Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses, 2^e édition, 2007.