Couronnes biholomorphes

Alexis Guérin

Leçons concernées : 203, 219, 223, 245.

La rédaction de ce développement est largement inspirée du travail de Salim Rostam.

Un théorème de Bernhard Riemann affirme que tout ouvert non vide simplement connexe de $\mathbb{C}$ et différent de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité. Dans ce développement nous traiterons du cas des ouverts qui ne sont pas simplement connexe et plus particulièrement qui "possèdent un trou".

Définition Pour $0 < r < R < \infty$, on définit la couronne $\mathcal{C}(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \;\; r < |z| < R\}$.

Nous allons montrer que deux couronnes sont biholomorphes si et seulement si le rapport des petits rayons est égal au rapport des grands rayons. La première implication étant évidente nous la résumons dans la propriété suivante :

Propriété Si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{C}(r, R)$ et $\mathcal{C}(\lambda r, \lambda R)$ sont biholomorphes.

Preuve Il suffit de considérer le biholomorphisme $h_\lambda : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \lambda z \end{array} \right.$

□

Le développement commence içi :

Théorème :
Si $\mathcal{C}(r_1, R_1)$ et $\mathcal{C}(r_2, R_2)$ sont biholomorphes alors il existe $\lambda > 0$ tel que $r_2 = \lambda r_1$ et $R_2 = \lambda R_1$.

Preuve 1. Préliminaires :

Quitte à composer par des homothéties (qui sont des biholomorphismes), on peut supposer que $r_2 = r_1 = 1$. De plus, on suppose que $R_1 \leqslant R_2$, ainsi les couronnes $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C}(1, R_1)$ et $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}(1, R_2)$ sont biholomorphes et $1 < R_1 \leqslant R_2$. Le reste de la démonstration va être voué à prouver que $R_1 = R_2$.
Soit $f : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ un biholomorphisme. Montrons que f est de la forme $z \mapsto cz^\alpha$ avec $\alpha := \frac{log(R_2)}{log(R_1)} \geqslant 1$.
Pour cela on considère

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & log(|f(z)|) - \alpha log(|z|) \end{array} \right. .$$

u est bien définie sur $\mathcal{C}_1$ car $\forall z \in \mathcal{C}_1 \; |z| > 1$ donc $|z| \neq 0$ et $f(z) \in \mathcal{C}_2$ donc $|f(z)| > 1$ donc $|f(z)| \neq 0$.
En utilisant le principe du maximum pour les fonctions harmoniques (cf Annexe) partant d'un ouvert de $\mathbb{C}$, on va montrer que u est la fonction nulle.

2. Harmonicité de u sur $\mathcal{C}_1$:

Commençons par remarquer que pour g une fonction dérivable, on a $\partial_z \overline{g} = \overline{\partial_{\bar{z}} g}$.
Revenons à notre fonction u, on peut écrire que

$$\forall z \in \mathcal{C}_1 \;\; u(z) = \frac{1}{2}\left(log(|f(z)|^2) - \alpha log(|z|^2)\right) = \frac{1}{2}\left(log(f\bar{f}) - \alpha log(z\bar{z})\right)$$

ce qui nous permet d'affirmer que u est de classe C^2 sur son ensemble de définition.
On a donc :

$$2\partial_z u = \frac{(\partial_z f)\bar{f} + f(\partial_z \bar{f})}{f\bar{f}} - \alpha \frac{(\partial_z z)\bar{z} + z\partial_z \bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Or $\partial_z \bar{f} = \overline{\partial_{\bar{z}} f} = 0$ car f est holomorphe. On établit de même que $\partial_z \bar{z} = 0$. Donc

$$2\partial_z u = \frac{\partial_z f}{f} - \frac{\alpha}{z}.$$

De plus, $z \mapsto \frac{\partial_z f}{f}$ est holomorphe sur $\mathcal{C}_1$, donc $\partial_{\bar{z}} \left(\frac{\partial_z f}{f}\right) = 0$, de même pour $z \mapsto \frac{\alpha}{z}$ sur $\mathcal{C}_1$ donc $\partial_{\bar{z}}\partial_z u = 0$. On a donc prouvé que u est harmonique sur $\mathcal{C}_1$.

3. Prolongement continu de u sur $\bar{\mathcal{C}_1}$:

Pour pouvoir appliquer le principe du maximum harmonique à u, on va la prolonger sur

$$\partial \mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} | z| = 1 \text{ ou } |z| = R_1\}.$$

Commençons par regarder le comportement de $|f(z)|$ lorsque $|z| \to 1$.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_1^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un complexe de module 1, et soit l une valeur d'adhérence de $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (une telle valeur d'adhérence existe car $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeur dans $\overline{\mathcal{C}_2}$ qui est compact). On note $(n_k)_k$ l'extractrice correspondante. On a $l \in \overline{\mathcal{C}_2}$, si $l \in \mathcal{C}_2$, comme f est bijective, il existe $z \in \mathcal{C}_1$ tel que $f(z) = l$. Comme f^{-1} est holomorphe, elle est en particulier continue donc on a $f^{-1}(f(z_{n_k})) = z_{n_k} \to z$ ce qui est absurde car $|z_{n_k}| \to 1$ et $|z| > 1$. Donc $l \in \partial C_2$, autrement dit, $|l| \in \{1, R_2\}$. On vient donc de montrer que si $(z_n) \in \mathcal{C}_1^{\mathbb{N}}$ converge en module vers 1 alors les valeurs d'adhérences de $(|f(z_n)|)_n$ sont 1 ou R_2.

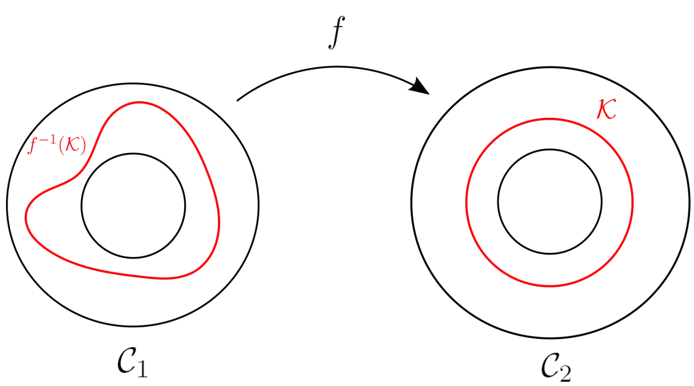

FIGURE 1 – Dessin à faire pendant le développement.

On va maintenant montrer que la suite $(|f(z_n)|)_n$ a une seule valeur d'adhérence.
Soit $\mathcal{K} := \mathcal{S}(0, \sqrt{R_2}) = \{z \in \mathbb{C} | z| = \sqrt{R_2}\}$, l'ensemble $\mathcal{K}$ est compact et comme $1 < R_2$ alors $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_2$. Comme f^{-1} est continue, l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{C}_1$ est également compact. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall z \in f^{-1}(\mathcal{K})$ $1 + \varepsilon < |z| < R_1 - \varepsilon$. En effet, $f^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{C}_1$ et $\partial\mathcal{C}_1$ sont deux compacts disjoints donc $d(f^{-1}(\mathcal{K}), \partial\mathcal{C}_1) > 0$. En particulier $\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)$ est connexe et ne rencontre pas $f^{-1}(\mathcal{K})$ donc $f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon))$ est un connexe (comme image d'un connexe par une fonction continue) ne rencontrant pas $\mathcal{K}$. Or les composantes connexes de $\mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{K}$ sont $\mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$ et $\mathcal{C}(\sqrt{R_2}, R_2)$, on a donc :

$$f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)) \subset \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2}) \quad \text{ou} \quad f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)) \subset \mathcal{C}(\sqrt{R_2}, R_2).$$

Quitte à considérer $\frac{R_2}{f}$ au lieu de f, on peut supposer que l'on est dans le premier cas (ie $f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)) \subset \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$). En reprenant les notations précédentes, comme $z_n \in \mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)$ à partir d'un certains rang, on a $f(z_n) \in \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$ à partir de ce même rang. Donc $|l| \in [1, \sqrt{R_2}]$. On conclut donc que $|l| = 1$. On a donc prolongé u par continuité sur $\{|z| = 1\}$ par $log(|1|) - \alpha log(|1|) = 0$.

Pour prolonger u par continuité sur $\{|z| = R_1\}$, on raisonne de la même façon : il suffit de remarquer que $f(\mathcal{C}(R_1 - \varepsilon, R_1)) \subset \mathcal{C}(\sqrt{R_2}, R_2)$. En effet, ce n'était pas le cas on aurait $f(\mathcal{C}(R_1 - \varepsilon, R_1)) \subset \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$ donc :

$$f(\mathcal{C}_1) = f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)) \cup f(\overline{\mathcal{C}(1+\varepsilon, R_1-\varepsilon)}) \cup f(\mathcal{C}(R_1-\varepsilon, R_1)) \subset \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2}) \cup \mathcal{K}'$$

avec $\mathcal{K}' = f(\overline{\mathcal{C}(1+\varepsilon, R_1-\varepsilon)}) \subset \mathcal{C}_2$ qui est compact car f est continue. Ainsi $\eta := d(\{|z| = R_2\}, \mathcal{K}') > 0$ donc $d(\{|z| = R_2\}, f(\mathcal{C}_1)) \geqslant min(R_2 - \sqrt{R_2}, \eta) > 0$. Ce qui est absurde car $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$. Ainsi u se prolonge par continuité sur $\{|z| = R_1\}$ par $log(|R_2|) - \alpha log(|R_1|) = 0$ (par définition de α). Donc u se prolonge par continuité par 0 sur $\partial\mathcal{C}_1$.

<u>4. Conclusion</u>

Donc u est continue sur $\overline{\mathcal{C}_1}$ et harmonique sur $\mathcal{C}_1$ donc par le principe du maximum harmonique, u atteint ses extremas sur $\partial\mathcal{C}_1$. Or, on a vu que $u|_{\partial\mathcal{C}_1} = 0$ donc $u = 0$.
En particulier $\partial_z u = 0$ donc $\frac{f'}{f} = \frac{\alpha}{z}$. En intégrant sur $\mathcal{K} = \mathcal{S}(0, \sqrt{R_2})$ parcouru une fois dans le sens direct, paramétré par $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt = \alpha \int_\gamma \frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad Ind_{f\circ\gamma}(0) = \alpha Ind_\gamma(0).$$

Or $Ind_\gamma(0) = 1$, donc $\alpha = Ind_{f\circ\gamma}(0) \in \mathbb{Z}$ et même $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (car on a vu au début que $\alpha \geqslant 1$). En dérivant $z \mapsto z^{-\alpha}f(z)$, on obtient que $f(z) = Cz^\alpha$. f étant non nulle, $C \neq 0$ et f étant injective on obtient que $\alpha = 1$. Donc $\frac{log(R_2)}{log(R_1)} = 1 \Rightarrow R_2 = R_1$.

□

Remarque La preuve nous donne que $f(z) = Cz$, or d'après la sous section 3 de la preuve $|C| = 1$ donc $|C| = 1$, ainsi f est une rotation. Mais attention, les rotations ne sont pas les seuls biholomorphismes possibles entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, puisqu'on a éventuellement considéré $\frac{R_2}{f}$ dans la sous section 3.

Remarque Le développement en l'état est trop long pour tenir en 15min, c'est pour cela que je recommande de ne pas détailler au tableau le prolongement par continuité de u sur $\{|z| = R_1\}$.

Annexe :

Remarque Le chapitre 11 de [AmarMath] est parfait pour approfondir la notion de fonction hamonique.

Définition Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est harmonique si u est C^2 et $\partial_z \partial_{\bar{z}} u = 0$.

Théorème Principe du maximum des fonctions harmoniques :
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et harmonique dans Ω, alors :

$$|u(z)| \leqslant sup\{|u(\zeta)|; \zeta \in \partial\Omega\}$$

.

Références :

[AmarMath] Eric Amar et Etienne Matheron, *Analyse complexe* Cassini, 2000.
[Rud] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe* (troisième édition). Dunod, 2009.
[Queff] Queffélec Hervé, *Topologie* (quatrième édition). Dunod, 2012.