Opérateurs à trace

Yann Delaporte et Alexis Guérin

Introduction

L'étude des opérateurs à trace est l'étude d'opérateurs auquels on peut étendre la notion de trace définie pour les application linaire en dimension finie. Cette étude est réalisée dans le cadre de la théorie spectrale.
La théorie spectrale est introduite au début du XXème par David Hilbert. C'est une théorie étendant à des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels généraux, la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres de matrices.

En mathématiques cette théorie trouve beaucoup d'application dans l'étude des fonctions analytiques, car les propriétés spectrales d'un opérateur sont liées à celles de fonctions analytiques sur les valeurs de son spectre.
En physique, cette théorie est utilisée dans le cadre de l'étude d'objets vibratoires et en physique quantique. En effet certains opérateurs associés à des particules, ont pour valeurs propres les différents niveaux d'énergie que cette particule peut atteindre.

On rappellera alors dans un premier temps quelques outils et définitions qui nous seront utiles par la suite. Puis on définira la notion d'opérateurs à trace et montreront plusieurs propriétés qu'ils vérifient. On travaillera par la suite sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt et on montrera notamment qu'il s'agit d'un espace de Hilbert. Enfin nous travaillerons sur un exemple qui a une application sur le Laplacien de Dirichlet.

1 Outils préliminaires

Dans tout ce qui suit, on considère $(H, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert et on note $\mathscr{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur H, i.e l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H pour la norme de H. Et on notera également $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à la norme H sur $\mathscr{L}(H)$

Définition 1.1 Soit T un endomorphisme de H. T est dit positif si T est autoadjoint et si :

$$\forall x \in H \ \langle Tx, x \rangle \geq 0$$

On note $\mathscr{L}^+(H)$ l'ensemble des opérateurs positifs

Définition 1.2 Soient E et F deux espaces de Banach, T une application linéaire de E dans F. T est dite compacte lorsque $T(B_E(0,1))$ est relativement compacte.
On note $\mathscr{K}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaire compacte de E dans F.

Proposition 1.3 Soit $P \in \mathscr{L}(H)$ si $P \in \mathscr{L}^+(H)$ alors il exique un unique $Q \in \mathscr{L}^+(H)$ tel que $P = Q^2$. On note alors $Q = P^{1/2}$.

Définition 1.4 Une isométrie partielle est une application linéaire entre deux espaces de Hilbert dont la restriction à l'orthogonal de son noyau est une isométrie

Définition 1.5 Soit $U \in \mathscr{L}(H)$, on dit que U est unitaire si $UU^* = Id$

2 Opérateurs à trace

Définition 2.1 Soit H un espace de Hilbert et T dans $\mathscr{L}(H)$ alors T est un opérateur à trace s'il existe $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Hilbert de H telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle |T|\psi_n, \psi_n \rangle < \infty \quad \text{avec } |T| = (T^*T)^{1/2} \tag{2.1.1}$$

On note $\mathscr{L}_1(H)$ l'ensemble des opérateurs à trace.

Remarque 2.2 Pour justifier l'existence et l'unicité de la racine de T^*T, il suffit de montrer que T^*T est un opérateur positif avec la proposition 1.3:

$$(T^*T)^* = T^*T \text{ et } \forall\ \phi \in H\ \langle T^*T\phi, \phi\rangle = \langle T\phi, T\phi\rangle = \|T\phi\|^2 \geq 0$$

Remarque 2.3 La condition précédente est indépendante de la base hilbertienne choisie. On a en effet par théorème de Bessel-Parseval et que, $|T|^{1/2}$ est auto-adjoint :
Pour $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une autre base hilbertienne,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\langle |T|\psi_n, \psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\||T|^{1/2}\psi_n\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\langle |T|^{1/2}\psi_n, \phi_k\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\langle \psi_n, |T|^{1/2}\phi_k\rangle|^2\end{aligned}$$

D'où par théorème de Fubini:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\langle |T|\psi_n, \psi_n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\langle \psi_n, |T|^{1/2}\phi_k\rangle|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}\||T|^{1/2}\phi_k\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\langle |T|\phi_k, \phi_k\rangle\end{aligned}$$

D'où l'indépendance du choix de la base hilbertienne dans (2.1.1).

Remarque 2.4 Lorsque H est de dimension finie n, on a directement $\mathscr{L}_1(H) = \mathscr{L}(H)$, H disposant d'une base orthonormée composée de n vecteurs. De plus pour T dans $\mathscr{L}(H)$, si T est auto-adjoint on dispose alors d'une base orthonomée $(\psi_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ de vecteurs propres de $|T|$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n}\langle |T|\psi_k, \psi_k\rangle = \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|$$

Où les λ_k sont les valeurs propres de T.

Lemme 2.5 Soient S dans $\mathscr{L}^+(H)$ et V une isométrie partielle. On a alors pour toute base hilbertienne $(\psi_n)_{n\in N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle V^*SV\psi_n, \psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle SV\psi_n, V\psi_n\rangle \leq \sum_{n=0}^{\infty}\langle S\psi_n, \psi_n\rangle$$

Preuve : On remarque dans un premier temps que comme S et V^*SV sont auto-adjoints et positifs, alors (avec la remarque 2.2) le résultat du lemme est indépendant de la base hilbertienne choisie. Prenons alors $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H adaptée à la décomposition $H = kerV \oplus kerV^\perp$ (on peut l'écrire car $kerV$ est un sous espace vectoriel fermé). On a alors si $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hibertienne de $kerV^\perp$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle SV\phi_n, V\phi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle SV\psi_n, V\psi_n\rangle$$

Comme $(V\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée, V étant une isométrie sur $kerV^\perp$, on peut la compléter en une base hilbertienne $(\tilde{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il vient alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle SV\psi_n, V\psi_n\rangle \leq \sum_{n=0}^{\infty}\langle S\tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_n\rangle \leq \sum_{n=0}^{\infty}\langle S\phi_n, \phi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle S\psi_n, \psi_n\rangle$$

□

Définition 2.6 Pour T dans $\mathscr{L}_1(H)$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne, on pose

$$\|T\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty}\langle |T|\psi_n, \psi_n\rangle$$

Proposition 2.7 $\mathscr{L}_1(H)$ muni de $\|\,.\,\|_1$ est un espace vectoriel normé.

Preuve : • L'homogénéité est directe par linéarité de la série positive, du produit scalaire et avec l'égalité pour λ dans $\mathbb{C}$

$$|\lambda T|^2 = (\lambda T)^*(\lambda T) = |\lambda|^2|T|^2$$

• De plus si $\|\,T\,\|_1 = 0$ alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle |T|\psi_n, \psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle T\psi_n, T\psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\|T\psi_n\|^2$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\;\; T\psi_n = 0$ donc $T = 0$
• La positivité de $\|\,.\,\|_1$ sont également directes.
Puis pour T_1 et T_2 dans $\mathscr{L}_1(H)$, on note les décompositions polaires (cf annexe) :

$$T_j = U_j|T_j|\,,\, j \in 1;2 \quad et \quad T_1 + T_2 = V|T_1 + T_2|$$

Il vient alors pour $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et N un entier naturel

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\langle |T_1+T_2|\phi_n, \phi_n\rangle &= \sum_{n=0}^{N}\langle \hat{V}(T_1+T_2)\phi_n, \phi_n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N}\langle \hat{V}U_1|T_1|\phi_n, \phi_n\rangle + \sum_{n=0}^{N}\langle \hat{V}U_2|T_2|\phi_n, \phi_n\rangle\end{aligned}$$

Or par Cauchy-Shwarz, on a pour $j \in \{1;2\}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}|\langle \hat{V}U_j|T_j|\phi_n,\phi_n\rangle| &= \sum_{n=0}^{N}|\langle |T_j|^{1/2}\phi_n, |T_j|^{1/2}U_j^*V\phi_n\rangle| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N}\| \, |T_j|^{1/2}\phi_n\| \, \| \, |T_j|^{1/2}U_j^*V\phi_n\| \\ &\leq (\sum_{n=0}^{N}\| \, |T_j|^{1/2}\phi_n\|^2)^{1/2}(\sum_{n=0}^{N}\| \, |T_j|^{1/2}U_j^*V\phi_n\|^2)^{1/2} \\ &\leq \|T_j\|_1^{1/2}(\sum_{n=0}^{N}\| \, |T_j|^{1/2}U_j^*V\phi_n\|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.5 deux fois on a

$$\sum_{n=0}^{N}\| \, |T_j|^{1/2}U_j^*V\phi_n\|^2 = \sum_{n=0}^{N}\langle U_j|T_j|U_j^*V\phi_n, V\phi_n\rangle \leq \|T_j\|_1$$

On en déduit alors

$$\sum_{n=0}^{N}\langle |T_1+T_2|\phi_n,\phi_n\rangle \leq \|T_1\|_1 + \|T_2\|_1$$

Ainsi en faisant tendre n vers l'infini, on trouve que $T_1+T_2 \in \mathscr{L}_1(H)$ mais aussi l'inégalité triangulaire :

$$\|T_1+T_2\|_1 \leq \|T_1\|_1 + \|T_2\|_1$$

Ainsi $(\mathscr{L}_1(H), \| \, . \, \|_1)$ est bien un espace vectoriel normé.

□

Proposition 2.8 $\mathscr{L}_1(H)$ est un idéal bilatéral dans $\mathscr{L}(H)$

Preuve : Soient $T \in \mathscr{L}_1(H)$ et $T' \in \mathscr{L}(H)$

• Grâce à la décomposition d'un opérateur en opérateur unitaire (cf annexe), et comme $\mathscr{L}_1(H)$ est un espace vectoriel, on peut supposer T unitaire. Ainsi $|T'T| = |T|$ donc $T'T \in \mathscr{L}_1(H)$.

• De plus $|TT'| = |T'^{-1}TT'| = T'^{-1}|T|T'$ et comme on a supposé T' unitaire alors l'image d'une base de Hilbert par T' est une base de Hilbert.

Ainsi $TT' \in \mathscr{L}_1(H)$.

□

Proposition 2.9 T est un opérateur à trace si et seulement si T^* est un opérateur à trace

Preuve : Soit $T \in \mathscr{L}_1(H)$, en remarquant que $|(|T|)| = (|T||T|^*)^{1/2} = (|T|^2)^{1/2} = |T|$ il vient que $|T| \in \mathscr{L}_1(H)$. On écrit la décomposition polaire de T : $T = U|T|$. On obtient alors $T^* = |T|U^*$, donc T^* est un opérateur à trace par la proposition précédente. Et la réciproque en découle directement comme $(T^*)^* = T$.

□

Proposition 2.10 $\mathscr{L}_1(H)$ est inclus dans $\mathscr{K}(H)$.

Preuve : Soit T dans $\mathscr{L}_1(H)$, comme $\mathscr{L}_1(H)$ est un idéal bilatéral alors T^*T, qui est égal à $|T^*T|$, est dans $\mathscr{L}_1(H)$. Pour $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et N dans $\mathbb{N}$ on pose

$$T_N = \sum_{n=0}^{N} \langle\, . \,, \psi_n\rangle T\psi_n$$

De plus soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \|T\psi_n\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle T\psi_n, T\psi_n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle |T^*T|\psi_n, \psi_n\rangle < \infty\end{aligned}$$

Puis par inégalités de Cauchy-Schwarz et égalité de Bessel, il vient que pour $M \geq N$ et ϕ dans H,

$$\begin{aligned}\|(T_M - T_N)\phi\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} |\langle\phi, \psi_n\rangle| \|T\psi_n\| &\leq (\sum_{n=N+1}^{M} |\langle\phi, \psi_n\rangle|^2)^{1/2} (\sum_{n=N+1}^{M} \|T\phi\|^2)^{1/2} \\ &\leq \|\phi\| (\sum_{n=N+1}^{\infty} \|T\psi_n\|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|T_M - T_N\| \leq (\sum_{n=N}^{\infty} \|T\psi_n\|^2)^{1/2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc comme $\mathscr{L}(H)$ est un espace de Hilbert et que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(H)$, alors elle y converge vers S un opérateur borné. De plus S coincide avec T sur une base hilbertienne, donc par continuité de T et S on a que $T = S$. Ainsi comme $\|T - T_n\| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, T est compact (cf annexe).

□

Lemme 2.11 Pour tout T dans $\mathscr{L}_1(H)$, on a $\|T\| \leq \|T\|_1$

Preuve : On considère T dans $\mathscr{L}_1(H)$, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H adaptée à la décomposition spectrale de $|T|$ (cf annexe).

$$|T| = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \langle\, . \,, \psi_n\rangle \psi_n \quad \text{avec } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ les valeurs propres de } |T|$$

On peut compléter la famille $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une base hilbertienne $(\tilde{\psi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H ce qui donne alors

$$\begin{aligned}\|T\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty}\langle |T|\tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\langle s_j\langle\tilde{\psi}_n, \psi_j\rangle\psi_j, \tilde{\psi}_n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n\end{aligned}$$

En particulier cela généralise le cas de la dimension finie.
De plus $\|T\| = \|\,|T|\,\|$, en effet

$$\forall\ \phi \in H,\ \|T\phi\|^2 = \langle T\phi, T\phi\rangle = \langle T^*T\phi, \phi\rangle = \langle |T|^2\phi, \phi\rangle = \langle |T|\phi, |T|\phi\rangle = \|\,|T|\,\|^2$$

De plus la proposition 1.11 nous donne que $\|\,|T|\,\|$ coïncide avec son rayon spectral. Donc

$$\|T\| = \|\,|T|\,\| = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\ s_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} s_n = \|T\|_1$$

□

Proposition 2.12 $(\mathscr{L}_1(H), \|\,.\,\|_1)$ est un espace de Banach.

Preuve : Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{L}_1(H), \|\,.\,\|_1)$. Soit M un réel positif qui borne cette suite. Par le lemme 2.11 c'est une suite de Cauchy pour $\|\,.\,\|$, donc elle converge vers T dans $(\mathscr{L}(H), \|\,.\,\|)$ qui est un espace de Banach.
Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne, par inégalité triangulaire montrée en 2.7 il vient pour m dans $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\langle |T - T_n + T_n|\psi_k, \psi_k\rangle &\leq \sum_{k=0}^{m}\langle (|T - T_n| + |T_n|)\psi_k, \psi_k\rangle \\ &\leq m\|T - T_n\| + \|T_n\|_1 \\ &\leq m\|T - T_n\| + M\end{aligned}$$

Comme $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $(\mathscr{L}(H), \|\,.\,\|)$, alors pour tout entier m on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ m\|T - T_n\| \leq 1$$

Il vient alors pour tout entier m

$$\sum_{k=0}^{m}\langle |T|\psi_k, \psi_k\rangle \leq 1 + M$$

Donc T est dans $\mathscr{L}_1(H)$ et il suit encore par inégalité triangulaire pour l et n des entiers

$$\sum_{k=0}^{m}\langle |T - T_n|\psi_k, \psi_k\rangle \leq m\|T - T_l\| + \|T_l - T_n\|_1$$

D'où pour $\epsilon > 0$ en prenant l et n suffisament grand

$$\sum_{k=0}^{m} \langle |T - T_n| \psi_k, \psi_k \rangle \leq \epsilon$$

Comme on a cette inégalité pour tout entier m, on en déduit

$$\|T - T_n\|_1 \leq \epsilon$$

Donc la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T dans $(\mathscr{L}_1(H), \|\,.\,\|_1)$ qui est donc un espace de Banach.

□

3 Operateurs de Hilbert-Schmidt

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 On dit que $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si $|T|^2 = T^*T \in \mathscr{L}_1(H)$.
Dans ce cas on note $T \in \mathscr{L}_2(H)$

Remarque 3.2 Comme $\mathscr{L}_1(H)$ est un idéal bilatéral alors $\mathscr{L}_1(H)$ inclus $\mathscr{L}_2(H)$

Proposition 3.3 $\mathscr{L}_2(H)$ est un espace vectoriel

Preuve : Si $T_1, T_2 \in \mathscr{L}_2(H)$ alors pour toutes bases de Hilbert $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $\forall j \in \{1; 2\}$

$$\|T_j^* T_j\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_j^* T_j \psi_n, \psi_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \|T_j \psi_n\|^2 < \infty$$

et ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|(T_1 + T_2)\psi_n\|^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \|T_j \psi_n\|^2 < \infty$
Donc $T_1 + T_2 \in \mathscr{L}_2(H)$.

□

Proposition 3.4 $\mathscr{L}_2(H)$ est un idéal bilatéral de $\mathscr{L}(H)$

Preuve : Soit $T \in \mathscr{L}_2(H)$ et U un opérateur unitaire. Si (ψ_n) une base de Hilbert, on a

$$\sum_{n\geq 0} \|UT\psi_n\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|T\psi_n\|^2 < \infty$$

Ainsi $UT \in \mathscr{L}_2(H)$. De plus $(U\psi_n)_n$ est une base de Hilbert. On obtient alors

$$\sum_{n\geq 0} \|T(U\psi_n)\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|T\psi_n\|^2 < \infty$$

Ainsi UT et TU sont dans $\mathscr{L}_2(H)$ et on généralise avec la décomposition d'un opérateur en combinaison de 4 opérateurs unitaire (cf annexe).

□

Proposition 3.5 $T \in \mathscr{L}_2(H)$ si et seulement si $T^* \in \mathscr{L}_2(H)$

Preuve : Avec la décomposition polaire (cf annexe) $T = U|T|$ et $T^* = |T|U^*$ ainsi

$$(T^*)^*T^* = U|T||T|U^* = U|T|^2U^*$$

Ainsi comme $|T|^2 \in \mathscr{L}_1(H)$ et que $\mathscr{L}_1(H)$ est un idéal bilatéral alors $T^* \in \mathscr{L}_2(H)$.
La réciproque découle de $(T^*)^* = T$.

□

Proposition 3.6 $\mathscr{L}_2(H)$ est inclu dans $\mathscr{K}(H)$

Preuve : Soit T dans $\mathscr{L}_2(H)$, comme $\mathscr{L}_2(H)$ est un idéal bilatéral alors T^*T, qui est égal à $|T^*T|$, est dans $\mathscr{L}_2(H)$. Pour $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et N dans $\mathbb{N}$ on pose

$$T_N = \sum_{n=0}^{N} \langle\,.\,,\psi_n\rangle T\psi_n$$

De plus pour $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \|T\psi_n\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle T\psi_n, T\psi_n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle |T^*T|\psi_n, \psi_n\rangle < \infty\end{aligned}$$

Puis par inégalités de Cauchy-Schwarz et égalité de Bessel, il vient que pour $M \geq N$ et ϕ dans H,

$$\begin{aligned}\|(T_N - T_M)\phi\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} |\langle \phi, \psi_n \rangle| \|T\psi_n\| &\leq (\sum_{n=N+1}^{M} |\langle \phi, \psi_n \rangle|^2)^{1/2} (\sum_{n=N+1}^{M} \|T\phi\|^2)^{1/2} \\ &\leq \|\phi\| (\sum_{n=N+1}^{\infty} \|T\psi_n\|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|T_N - T_M\| \leq (\sum_{n=N}^{\infty} \|T\psi_n\|^2)^{1/2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc comme $\mathscr{L}(H)$ est un espace de Hilbert et que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(H)$, alors elle y converge vers S un opérateur borné. De plus S coincide avec T sur une base hilbertienne, donc par continuité de T et S alors ils sont égaux. Ainsi comme $\|T - T_n\| \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, T est compact (cf annexe).

□

Proposition 3.7 Soient $T_1, T_2 \in \mathscr{L}_2(H)$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de Hilbert, alors

$$\sum_{n \geq 0} |\langle T_2^* T_1 \psi_n, \psi_n \rangle| < \infty$$

De plus
$\sum_{n \geq 0} \langle T_2^* T_1 \psi_n, \psi_n \rangle$ est indépendante de la base de Hilbert choisie et $\sum_{n \geq 0} \langle T_2^* T_1 \psi_n, \psi_n \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle T_1 T_2^* \psi_n, \psi_n \rangle$

Preuve : Soit $(\psi_n)_n$ une base de Hilbert de H. Comme $T_1, T_2 \in \mathscr{L}_2(H)$ on a par Cauchy-Scharz

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} |\langle T_2^* T_1 \psi_n, \psi_n \rangle| &= \sum_{n=0}^{N} |\langle T_1 \psi_n, T_2 \psi_n \rangle| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} \|T_1 \psi_n\| \|T_2 \psi_n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} (\|T_1 \psi_n\|^2 + \|T_2 \psi_n\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2} (\|T_1^* T_1\|_1 + \|T_2^* T_2\|_1) < \infty\end{aligned}$$

On écrit maintenant l'égalité de Bessel-Parseval pour $(\phi_n)_n$ une seconde base de Hilbert

$$\sum_{n \geq 0} \langle T_2^* T_1 \psi_n, \psi_n \rangle = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \langle T_1 \psi_n, \phi_k \rangle \langle \phi_k, T_2 \phi_n \rangle$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\langle T_2^*T_1\psi_n,\psi_n\rangle &\overset{Fubini}{=} \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0}\langle T_1\psi_n,\phi_k\rangle\langle\phi_k,T_2\phi_n\rangle \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0}\langle T_2^*\phi_k,\psi_n\rangle\langle\psi_n,T_1^*\phi_n\rangle \\
&= \sum_{k\geq 0}\langle T_2^*\phi_k,T_1^*\phi_k\rangle \\
&= \sum_{k\geq 0}\langle T_1T_2^*\phi_k,\phi_k\rangle
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.8 Soit T_1 et T_2 dans $\mathscr{L}_2(H)$, alors T_1T_2 est dans $\mathscr{L}_1(H)$.

Preuve : On pose la décomposition polaire (cf annexe) $|T_1T_2| = \hat{U}^*T_1T_2$. Comme $\hat{U}T_1$ et $T_1^*\hat{U}^*$ sont dans $\mathscr{L}_2(H)$, on a par la proposition précédente en considérant $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Hilbert

$$\sum_{n\geq 0}\langle|T_1T_2|\psi_n,\psi_n\rangle = \sum_{n\geq 0}\langle(T_1^*\hat{U}^*T_2|\psi_n,\psi_n\rangle \leq +\infty$$

D'où $T_1T_2 \in \mathscr{L}_1(H)$.

□

3.2 Trace d'un opérateur à trace

Proposition 3.9 Soit T dans $\mathscr{L}_1(H)$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, alors la série $\sum\langle T\psi_n,\psi_n\rangle$ converge absolument et la limite est indépendante de la base hilbertienne.

Preuve : On écrit la décomposition polaire (cf annexe) $T = U|T|$ ce qui nous donne $T = (U|T|^{1/2})|T|^{1/2}$. Ainsi comme $|T|^{1/2}$ est dans $\mathscr{L}_2(H)$, qui est un idéal bilatéral de $\mathscr{L}(H)$, on peut alors appliquer la proposition 3.7 pour obtenir le résultat.

□

Définition 3.10 Pour T dans $\mathscr{L}_1(H)$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, on définit alors la trace de T par

$$Tr\,T := \sum_{n=0}^{\infty}\langle T\psi_n,\psi_n\rangle$$

Proposition 3.11 L'application suivante

$$\begin{aligned} Tr : \mathscr{L}_1(H) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ T &\mapsto Tr(T) \end{aligned}$$

est une forme linéare vérifiant $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$ pour T dans $\mathscr{L}_1(H)$.

Preuve : Par linéarité des séries convergentes, Tr définie bien une forme linéaire. Et par linéarité de la conjugaison et sesquilinéarité du produit scalaire dans H on a bien $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$ pour T dans $\mathscr{L}_1(H)$.

$\square$

Proposition 3.12 L'application $(T, S) \in \mathscr{L}_2(H) \longmapsto Tr(TS^*) \in \mathbb{C}$ est un produit scalaire sur $\mathscr{L}_2(H)$, la norme associée, appelée norme de Hilbert-Schmidt, est notée $\| \, . \, \|_2$. De plus l'application $T \in \mathscr{L}_2(H) \longmapsto T^* \in \mathscr{L}_2(H)$ est unitaire.

Preuve : L'application est clairement linéaire à gauche et anti-linéaire à droite. elle est également définie positive car pour T dans $\mathscr{L}_2(H)$, TT^* est dans $\mathscr{S}^+(H)$ et est nul si est seulement si il s'annule sur une base hilbertienne, i.e $\|T\|_2 = 0$. Pour S dans $\mathscr{L}_2(H)$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H on a par la proposition 3.7

$$Tr(TS^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle TS^*\psi_n, \psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S^*T\psi_n, \psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_n, T^*S\psi_n\rangle$$

Soit

$$Tr(TS^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle T^*S\psi_n, \psi_n\rangle} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \langle ST^*\psi_n, \psi_n\rangle} = \overline{Tr(ST^*)}$$

Donc l'application est anti-symétrique et définie donc bien un produit scalaire.
Aussi, avec la proposition 3.7 on a

$$\|T^*\|_2 = \|TT^*\|_1 = \|T^*T\|_1 = \|T\|_2$$

Donc l'application $T \in \mathscr{L}_2(H) \longmapsto T^* \in \mathscr{L}_2(H)$ conserve la norme de Hilbert-Schmidt et est donc unitaire au sens des opérateurs anti-linéaire, i.e. conserve la norme.

$\square$

Proposition 3.13 Pour tout T dans $\mathscr{L}_1(H)$, on a

$$\|T\| \leq \|T\|_2 \leq \|T\|_1$$

Preuve : On suppose dans un premier temps que T est dans $\mathscr{L}^+(H)$ et on écrit sa décomposition spectrale dans la famille orthonormée $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$T = \sum_{n\geq 0} s_n\langle\, .\, , \psi_n\rangle\psi_n \quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$$

On a déjà vue que $\|T\|_1 = \sum_{n\geq 0} s_n$, et on a de la même manière $\|T\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} s_n^2$
Or on a les inégalités suivantes

$$\underset{n\geq 0}{max}(s_n) \leq (\sum_{n\geq 0} s_n^2)^{1/2} \leq \sum_{n\geq 0} s_n$$

S'en suit alors le cas général

$$\|T\| = \||T|\| \leq \||T|\|_2 = \|T\|_2 \leq \||T|\|_1 = \|T\|_1$$

□

Proposition 3.14 $(\mathscr{L}_2(H), \|\,.\,\|_2)$ est un espace de Hilbert.

Preuve : Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{L}_2(H), \|\,.\,\|_2)$, par la proposition précédente c'est une suite de Cauchy pour la norme $\|\,.\,\|$, donc elle converge vers T dans $(\mathscr{L}(H), \|\,.\,\|)$. On a alors pour $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et m, n et l des entiers

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\langle |T-T_n|^2\psi_k, \psi_k\rangle &= \sum_{k=0}^{m} \||T - T_l + T_l - T_n|\psi_k\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{m} \|(T - T_l + T_l - T_n)\psi_k\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{m}(\|(T-T_l)\psi_k\|^2 + \|(T_l - T_n)\psi_k\|^2 + 2Re(\langle (T-T_l)\psi_k, (T_l-T_n)\psi_k\rangle)) \\
&\leq (m+1)\|T-T_l\|^2 + \|T_l - T_n\|_2^2 + 2\sum_{k=0}^{m}|\langle (T-T_l)\psi_k, (T_l - T_n)\psi_k\rangle|
\end{aligned}$$

Or pour $\epsilon > 0$, on a pour l suffisament grand, comme $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathscr{L}_2(H), \|\,.\,\|_2)$ donc bornée par $M > 0$ et converge vers T dans $(\mathscr{L}(H), \|\,.\,\|)$

$$(m+1)\|T - T_l\|^2 \leq \epsilon \quad et \quad \|T_l - T_n\|^2 \leq \|T_l - T_n\|_2^2 \leq 4M^2$$

Par ailleurs on a par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}|\langle (T-T_l)\psi_k, (T_l-T_n)\psi_k\rangle| &\leq \sum_{k=0}^{m} \|T-T_l\|\|T_l - T_n\| \\
&\leq (m+1)\|T - T_l\|\|T_l - T_n\|
\end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout entier m et $\epsilon > 0$, on a pour l assez grand

$$\sum_{k=0}^{m} \langle |T - T_n|^2 \psi_k, \psi_k \rangle \leq \epsilon + 4M^2 + 2\epsilon M$$

Ainsi on en déduit que $T - T_n$ est dans $\mathscr{L}(H)$, donc T aussi comme $\mathscr{L}_2(H)$ est un espace vectoriel normé.
Or pour tout entier m on a pour n et l suffisaments grands

$$\|T_l - T_n\|_2^2 \leq \epsilon \quad et \quad m\|T - T_l\| \|T_l - T_n\| \leq \epsilon$$

Il vient que pour tout entier m et $\epsilon > 0$, on a pour l et n suffisaments grands

$$\sum_{k=0}^{m} \langle |T - T_n|^2 \psi_k, \psi_k \rangle \leq 4\epsilon$$

Ainsi on en déduit

$$\|T - T_n\|_2^2 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $(\mathscr{L}_2(H), \|\,.\,\|_2)$ et cet espace est donc un espace de Hilbertt.

□

Proposition 3.15 Pour T_1 et T_2 dans $\mathscr{L}_2(H)$ on a

$$\|T_1 T_2\|_2 \leq \|T_1\| \|T_2\|_2 \leq \|T_1\|_2 \|T_2\|_2$$

Preuve : Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H on a

$$\begin{aligned} \|T_1 T_2\|_2^2 &= \sum_{n\geq 0} \|T_1 T_2 \psi_n\|^2 \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \|T_1\|^2 \|T_2 \psi_n\|^2 \\ &\leq \|T_1\|^2 \|T_2\|_2^2 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité en utilisant également la proposition 3.13.

□

Proposition 3.16 Soient T_1 et T_2 dans $\mathscr{L}_2(H)$, on a $Tr(T_1 T_2) = Tr(T_2 T_1)$ et de plus

$$\|T_1 T_2\|_1 \leq \|T_1\| \|T_2\|_1$$

Preuve : La première égalité découle directement de la proposition 3.7 avec $(T_2^*)^* = T_2$, on a alors en posant les décompositions polaires $T_2 = U|T_2|$ et $\hat{V}T_1T_2 = |T_1T_2|$ par inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(\mathscr{L}_2(H), \|\,.\,\|_2)$, $|T_2|^{1/2}$ étant auto-adjoint, et par la proposition précédente

$$\begin{aligned}
\|T_1T_2\|_1 &= Tr(|T_1T_2|) \\
&= Tr(\hat{V}T_1U|T_2|^{1/2}|T_2|^{1/2}) \\
&\leq \|\hat{V}T_1U|T_2|^{1/2}\|_2\||T_2|^{1/2}\|_2 \\
&\leq \|\hat{V}T_1U\|\||T_2|^{1/2}\|_2\||T_2|^{1/2}\|_2 \\
&\leq \|T_1\|\||T_2|^{1/2}\|_2^2
\end{aligned}$$

Or $\||T_2|^{1/2}\|_2^2 = \|T_2\|_1$, d'où l'inégalité.

$\square$

Proposition 3.17 Pour tout T_1 dans $\mathscr{L}_1(H)$ et T_2 dans $\mathscr{L}(H)$, on a

$$Tr(T_1T_2) = Tr(T_2T_1) \quad et \quad |Tr(T_1T_2)| \leq \|T_1\|_1\|T_2\|$$

Preuve : Pour la symétrie de la trace, on peut se ramener au cas où T_2 est unitaire par décomposition en somme d'opérateurs unitaires et par linéarité de la trace. Ainsi en considérant $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne et en posant pour tout entier n $\phi_n = T_2^*\psi_n$ on a comme T_2 est unitaire

$$\begin{aligned}
Tr(T_2T_1) &= \sum_{n\geq 0}\langle T_1\psi_n, T_2^*\psi_n\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0}\langle T_1T_2\phi_n, \phi_n\rangle
\end{aligned}$$

Soit par indépendance de la trace vis-à-vis du choix de la base hilbertienne

$$Tr(T_2T_1) = Tr(T_1T_2)$$

Pour l'inégalité, supposons dans un premier temps que T_1 est positif. On note alors sa décomposition spectrale dans une famille orthonormée $(\psi_n)n \in \mathbb{N}$

$$T_1 = \sum_{n\geq 0} s_n\langle\,\cdot\,, \psi_n\rangle\psi_n \qquad (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$$

On a déjà vue que $\sum_{n\geq 0} s_n = \|T_1\|_1$, on a alors en complétant $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une base de Hilbert $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
Tr(T_1T_2) &= \sum_{n\geq 0}\langle T_1T_2\phi_n, \phi_n\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0}\langle\sum_{j\geq 0}(s_j\langle T_2\phi_n, \psi_j\rangle\psi_j), \phi_n\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0} s_n\langle T_2\psi_n, \psi_n\rangle
\end{aligned}$$

D'où par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|Tr(T_1T_2)| \leq \|T_2\|\|T_1\|_1$$

Il vient alors dans le cas général, en posant la décomposition polaire $T_1 = U|T_1|$

$$|Tr(T_2T_1)| = |Tr(T_2U|T_1|)| \leq \|T_2U\|\|T_1\|_1 \leq \|T_2\|\|T_1\|_1$$

$\square$

4 Un exemple fondamental

Considérons Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, avec d dans $\mathbb{N}^*$. On va alors prendre l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$. Pour K dans $L^2(\Omega \times \Omega)$, on définie pour tout ψ dans H

$$T_K\psi = \int_\Omega K(\,\cdot\,, y)\psi(y)dy$$

L'application T_K définie bien un opérateur borné sur H. On a en effet par inégalité de Cauchy-Schwarz pour ψ dans H

$$\begin{aligned}
\|T_K\psi\|^2 = \int_\Omega |T_K\psi(x)|^2dx &= \int_\Omega \left| \int_\Omega K(x,y)\psi(y)dy \right|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2dy \right) \left(\int_\Omega |\psi(y)|^2dy \right) dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\psi(y)|^2dy \right) \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2dy \right) dx \right) \\
&\leq \|\psi\|^2\|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)}
\end{aligned}$$

D'où $\|T_K\| \leq \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.
Par ailleurs son adjoint vérifie $T_K^* = T_{\tilde{K}}$ avec $\tilde{K}(x,y) = \overline{K(y,x)}$, on a en effet par théorème de Fubini pour ψ et ϕ dans H

$$\begin{aligned}
\int_\Omega T_K\psi(x)\overline{\phi(x)}dx &= \int_\Omega \left(\int_\Omega K(x,y)\psi(y)\overline{\phi(x)}dy \right) dx \\
&= \int_\Omega \psi(y) \left(\int_\Omega K(x,y)\overline{\phi(x)}dx \right) dy \\
&= \int_\Omega \psi(y)\overline{\left(\int_\Omega \overline{K(x,y)}\phi(x)dx \right)}dy \\
&= \int_\Omega \psi(y)\overline{T_{\tilde{K}}\phi(y)}dy
\end{aligned}$$

D'où l'assertion précédente.

Proposition 4.1 T_K est dans $\mathscr{L}_2(H)$ et $\|T_K\|_2 = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$

Preuve : On considère $(\psi_n)_{n\leq 0}$ une base de Hilbert de $L^2(\Omega)$. On pose

$$\phi_{m,n}(x,y) = \psi_m(x)\overline{\psi_n(y)},\ \forall (x,y) \in \Omega^2$$

On peut remarquer que $(\phi_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est une base de Hilbert de $L^2(\Omega\times\Omega)$. Ainsi si on note $k_{m,n} = \langle K, \phi_{m,n}\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \langle T_K\psi_n, \psi_m\rangle_{L^2(\Omega)}$ on a :

$$K = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} k_{m,n}\phi_{m,n} \qquad \text{et} \qquad \|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |k_{m,n}|^2$$

Puis en utilisant le théorème de Fubini et le théorème de Pythagore on obtient que :

$$\begin{aligned}
\|T_K\psi_m\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} k_{n,p}\psi_n(\,\cdot\,) \int_\Omega \overline{\psi_p(y)}\psi_m(y)dy \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\| \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} k_{n,p}\psi_n(\,\cdot\,)\langle \psi_m, \psi_p\rangle \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} k_{n,m}\psi_n(\,\cdot\,) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} |k_{n,m}|^2
\end{aligned}$$

Il vient alors comme $(k_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est dans $L^2(\mathbb{N})$, que T_K est dans $\mathscr{L}_2(H)$ et $\|T_K\|_2 = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

□

Proposition 4.2 L'application $K \in L^2(\Omega\times\Omega) \longmapsto T_K \in \mathscr{L}_2(H)$ est une isométrie bijective.

Preuve : Par la proposition précédente l'application est isométrique donc en particulier injective. Soit T dans $\mathscr{L}_2(H)$, on note alors la décomposition polaire de T et la décomposition spectrale de $|T|$

$$T = U|T| \quad et \quad |T| = \sum_{n\geq 0} s_n\langle\,\cdot\,,\psi_n\rangle\psi_n$$

Où $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une base de Hilbert de H.
Ce qui nous donne en particulier $T = \sum_{n\geq 0} s_n\langle\,\cdot\,,\psi_n\rangle U\psi_n$, on a alors pour ψ dans H et x dans Ω

$$\begin{aligned}
T\psi(x) &= \sum_{n\geq 0} s_n \left(\int_\Omega \psi(y)\overline{\psi_n(y)}dy \right) (U\psi_n)(x) \\
&= \int_\Omega \psi(y) \left(\sum_{n\geq 0} s_n\overline{\psi_n(y)}(U\psi_n)(x) \right) dy
\end{aligned}$$

On a alors en posant $K(x,y) = \sum_{n\geq 0} s_n\overline{\psi_n(y)}(U\psi_n)(x)$, K qui est bien dans $\mathscr{L}^2(\Omega\times\Omega)$, $T = T_K$, i.e. l'application est surjective donc bijective.

□

Proposition 4.3 Soit A et B dans $\mathscr{L}_2(H)$ tel que $A = T_a$ et $B = T_b$, avec a et b dans $L^2(\Omega \times \Omega)$. En posant T l'élément de $\mathscr{L}_1(H)$ définie par $T = AB$, on a alors

$$Tr(T) = \int_\Omega t(x,x)dx$$

Où

$$t : \left| \begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & \int_\Omega a(x,z)b(z,y)dz \end{array} \right.$$

Preuve : On a, avec la proposition 4.2, que

$$Tr(T) = Tr(AB) = \langle A, B^* \rangle_{\mathscr{L}_2(H)} = \langle a, \tilde{b} \rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \int_{\Omega\times\Omega} a(x,y)b(y,x)\ dx\ dy$$

Avec le théorème de Fubini, on en déduit que :

$$Tr(T) = \int_\Omega \left(\int_\Omega a(x,y)b(y,x)\ dy \right)\ dx$$

$\square$

Ces dernières expressions de la trace et de la normes de Hilbert-Schmidt de T nous permettent alors, en les appliquant, par exemple, à l'inverse du Laplacien de Dirichlet de calculer la valeur de la série harmonique ou la valeur de la série de terme général $(\frac{1}{n^4})_{n\in\mathbb{N}}$.

5 Annexe

Proposition : Décomposition polaire
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, il existe une unique isométrie partielle U telle que :

$$T = U|T| \quad \text{avec } |T| = (T^*T)^{1/2}$$

et

$$Ker(U) = Ker(|T|) = Ker(T)$$

Remarque / Notations :
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ on pose $T = U|T|$ sa décomposition polaire.
Alors

$$|T| = \hat{U}T \;\; \text{avec} \;\; \hat{U} := \left| \begin{array}{r} \left(U_{|Ker(U)^\perp}\right)^{-1} \quad \text{sur } Ker(U)^\perp \\ \\ 0 \quad \text{sur } Ker(U) \end{array} \right.$$

Proposition : Décomposition en opérateurs unitaires
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ alors on peut décomposer T en une combinaison linéaire de 4 opérateurs unitaires

Preuve : Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, on remarque dans un premier temps que T se décompose en combinaison de 2 opérateurs auto-adjoint :

$$T = \frac{T+T^*}{2} + i\frac{T-T^*}{2i}$$

On considère maintenant un opérateur auto-adjoint T tel que $\|T\| \leq 1$ (ainsi $Id - T^2$ est positif et donc admet une unique racine) et on le décompose de la façon suivante :

$$T = \frac{1}{2}(T + i(Id - T^2)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(T - i(Id - T^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.0.1}$$

Prouvons maintenant que les deux terme de cette décomposition sont des opérateurs unitaires. Pour cela on pose le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (T + i(Id - T^2)^{\frac{1}{2}})(T + i(Id - T^2)^{\frac{1}{2}})^* &= (T + i(Id - T^2)^{\frac{1}{2}})(T - i(Id - T^2)^{\frac{1}{2}}) \\ &= T^2 + (Id - T^2) \\ &= Id \end{aligned}$$

Le calcul est identique pour le deuxième terme de la décomposition (5.0.1). D'où la décomposition.

□

Proposition : Soient $T \in \mathscr{L}(H)$ et $(\phi_n)_n$ une base de Hilbert , on note $\rho_n := \|T - T_n\|$ avec $T_n := \sum_{k=0}^{n} \langle \cdot, \phi_k \rangle T\phi_k$, alors T est compact si et seulement si $\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition : Décomposition spectrale d'un opérateur compact
Soit $T \in \mathscr{K}(H)$ alors si $(s_n)_{n\geq 1}$ représente la famille décroissante de valeurs propres positives de $|T|$ associée à la famille orthonormée de vecteur propre $(\phi_n)_n$, alors la série $\sum_{n\geq 1} s_n \langle \cdot, \phi_n \rangle \phi_n$ converge vers $|T|$ dans $\mathscr{L}(H)$

Proposition : Soit $T \in \mathscr{K}(H)$, on note $(s_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres de $|T|$. Alors,

$$\| \, |T| \, \| = \sup_{n\geq 1} s_n$$

Preuve : Comme T est un opérateur compact alors d'après la proposition 1.9 si on note $(\phi_n)_n$ une famille orthonomée de vecteur propre, on peut écrire que

$$|T| = \sum_{n\geq 1} s_n \langle \cdot, \phi_n \rangle \phi_n$$

• Ainsi $\forall \ x \in H$

$$\frac{\| \, |T|x \, \|^2}{\|x\|^2} = \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{s_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n}{\|x\|} \right\|^2 = \sum_{n\geq 1} |s_n|^2 \frac{|\langle x, \phi_n \rangle|^2}{\|x\|^2}$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{|\langle x, \phi_n \rangle|^2}{\|x\|^2} = 1$ et $\frac{|\langle x, \phi_n \rangle|^2}{\|x\|^2} \leq 1$, donc $\left(\frac{|\langle x, \phi_n \rangle|^2}{\|x\|^2} \right)_{n\geq 1}$ est un germe de probabilté donc il existe donc un espace de probabilté et une variable aléatoire X sur cet espace tel que $\forall n \geq 1 \ \mathbb{P}(X = n) = \frac{|\langle x, \phi_n \rangle|^2}{\|x\|^2}$.

On considère maintenant la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ n & \longmapsto & (s_n)^2 \end{array} \right.$

Ainsi $\frac{\| \, |T|x \, \|^2}{\|x\|^2} = \mathbb{E}(f(X))$ et $\mathbb{E}(f(X)) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f(\mathbb{N}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (s_n)^2$

On a donc que

$$\| \, |T| \, \| \leq \sup_{n\geq 1} s_n$$

• De plus, $\forall \ n \in \mathbb{N}$

$$\| \, |T|\phi_n \, \| = |s_n| \|\phi_n\| = |s_n|$$

Donc $\forall \ n \in \mathbb{N} \ \| \, |T| \, \| \geq s_n$ et ainsi

$$\| \, |T| \, \| \geq \sup_{n\geq 1} s_n$$

On conclut donc que :

$$\| \, |T| \, \| = \sup_{n\geq 1} s_n$$

□