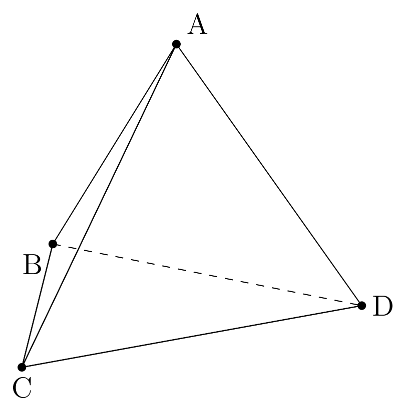
Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$

La rédaction de ce développement est celle de Brian Flanagan.
Leçons concernées : 101, 104, 105, 108, 160, 161.

Définition Le groupe $Is(X)$ des isométries d'un objet $X \subset \mathbb{R}^3$ est le sous groupe des isométries de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ qui stabilise X.

Théorème
Le groupe des isométries du tétraèdre Δ_4 est $\mathrm{Is}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$.

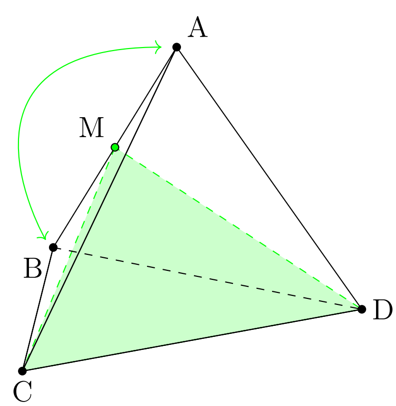
Preuve Notons A, B, C, D les sommets du tétraèdre, comme dans la figure ci-dessous.



Les sommets du tétraèdre sont ses points extrémaux, donc le groupe $\mathrm{Is}(\Delta_4)$ agit par permutation sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. Puisque (A, B, C, D) constitue une base affine de l'espace, on dispose donc d'une injection

$$\varphi : \mathrm{Is}(\Delta_4) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}} \simeq \mathfrak{S}_4.$$

Considérons M le milieu du segment $[AB]$ et soit r la réflexion par rapport au plan (MCD). Alors r réalise la transposition $(A\ B)$ dans $\mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$ et $r \in \mathrm{Is}(\Delta_4)$.



Par symétrie des rôles de A, B, C et D, toutes les transpositions sont dans l'image de φ et par conséquent, φ est surjective et est donc un isomorphisme.

$\square$

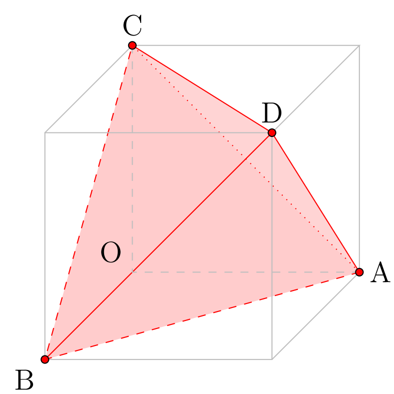
Théorème
La table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ est donnée par :

	Id [1]	(1 2) [6]	(1 2 3) [8]	(1 2 3 4) [6]	(1 2)(3 4) [3]
$triv$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_{Δ_4}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\Delta_4} \cdot \varepsilon$	3	-1	0	1	-1

Preuve **Étape 1 :** (caractères de degré 1)
Les caractères de degré 1 de $\mathfrak{S}_4$ sont les morphismes de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathbb{C}^*$, or on sait qu'il n'existe que le morphisme trivial $triv$ et la signature ε. On obtient donc le début de table

	Id [1]	(1 2) [6]	(1 2 3) [8]	(1 2 3 4) [6]	(1 2)(3 4) [3]
$triv$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1

Étape 2 : (une représentation par action sur le tétraèdre)
Fixons le tétraèdre inscrit dans le cube, en rouge dans la figure ci-dessous, de sorte que si O désigne l'origine de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace vectoriel et que $\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.



Considérons la représentation $(\mathbb{R}^3, \rho)$ induite par l'isomorphisme $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Is}(\Delta_4)$, dont on note χ_{Δ_4} le caractère.
Notons O' le barycentre des points A, B, C, D, de sorte que (O', A, B, C) forme une base affine de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, si $\mathcal{B}$ est la base $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'D})$, en utilisant la relation $\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} + \overrightarrow{O'D} = \overrightarrow{0}$, les matrices des $\rho(g)$ s'écrivent :

$$\mathscr{M}_{\mathcal{B}}(A\ B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{M}_{\mathcal{B}}(A\ B\ C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{M}_{\mathcal{B}}(A\ B\ C\ D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{M}_{\mathcal{B}}(A\ B)(C\ D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc le caractère χ_{Δ_4}, qui est bien irréductible puisque

$$\langle \chi_{\Delta_4}, \chi_{\Delta_4} \rangle = \frac{1}{24}(1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2) = 1,$$

ce qui nous permet de continuer à remplir la table

	Id [1]	(1 2) [6]	(1 2 3) [8]	(1 2 3 4) [6]	(1 2)(3 4) [3]
$triv$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_{Δ_4}	3	1	0	-1	-1

Étape 3 : (multiplier par ε)
On remarque que si l'on considère le produit tensoriel entre la représentation standard et ε, on obtient une représentation dont le caractère est $\chi_{\Delta_4} \cdot \varepsilon$. Or,

$$\langle \chi_{\Delta_4} \cdot \varepsilon, \chi_{\Delta_4} \cdot \varepsilon \rangle = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_4} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \chi_{\Delta_4}(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma) \overline{\chi_{\Delta_4}(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma)} = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_4} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \chi_{\Delta_4}(\sigma) \overline{\chi_{\Delta_4}(\sigma)} = \langle \chi_{\Delta_4}, \chi_{\Delta_4} \rangle = 1,$$

donc $\chi_{\Delta_4} \cdot \varepsilon$ est un caractère irréductible, ce qui nous permet à nouveau de compléter notre table

	Id [1]	(1 2) [6]	(1 2 3) [8]	(1 2 3 4) [6]	(1 2)(3 4) [3]
$triv$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_{Δ_4}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\Delta_4} \cdot \varepsilon$	3	-1	0	1	-1

Enfin, on sait qu'il nous reste un dernier caractère à déterminer. Puisque la somme des carrés des dimension des caractères irréductibles est égale à l'ordre de $\mathfrak{S}_4$ (*i.e.* 24), le degré de ce dernier caractère est 2 et nous le nommerons donc χ_2. Comme précédemment, $\chi_2 \cdot \varepsilon$ est encore un caractère irréductible, nécessairement identique à χ_2 puisqu'il est lui aussi de degré égal à 2. Ainsi, on a $\chi_2(1\ 2) = \chi(1\ 2\ 3\ 4) = 0$, puisque la signature de ces éléments vaut -1. Notons pour le moment $a = \chi(1\ 2\ 3)$ et $b = \chi((1\ 2)(3\ 4))$. Les relations d'orthogonalité nous donnent

$$\langle \chi_2, \chi_{\Delta_4} \rangle = 0 = \frac{1}{24}(1 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 8 \cdot a \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot b \cdot (-1)) = \frac{1}{24}(6 - 3b),$$

d'où l'on déduit que $b = 2$ et

$$\langle \chi_2, triv \rangle = 0 = \frac{1}{24}(1 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 8 \cdot a \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1) = \frac{1}{24}(2 + 8a + 6),$$

qui nous permet de conclure que $a = -1$. Finalement, on a bien la table annoncée.

□

Références :

[H2G2T1] Histoire hédoniste de groupe et de géométrie Tome 1.
[IsePec] L'oral de l'agrégation de mathématiques, Lucas Isemann et Thimothée Pecatte.