TD d'optimisation numéro 1
optimisation sans contrainte

Jocelyne Erhel

ENSAI, Février 2018

1 Exercice 1: moindres carrés

Soit $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, et $b \in \mathbf{R}^m$, avec $n \leq m$.

On considère la fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \|b - Ax\|^2 . \tag{1}$$

On admet que f est de classe $C^2(\mathbf{R}^n)$.

1. On suppose que $ker(A) = \{0\}$. En déduire que $A^T A$ est symétrique définie positive.

2. Calculer le gradient et le Hessien de f en tout point x.

3. Montrer que f est strictement convexe dans $\mathbf{R}^n$.

4. Montrer que f admet un unique point de minimum global dans $\mathbf{R}^n$.

2 Exercice 2: régression linéaire

On considère maintenant un cas particulier de l'exercice 1, avec $n = 2$. Soit $A \in \mathbf{R}^{m \times 2}$ avec $m \geq 2$ et $b \in \mathbf{R}^m$ la matrice et le vecteur définis par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \dots & \\ a_i & 1 \\ \dots & \\ a_m & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1. On suppose que $a_1 \neq a_2$. Montrer que $ker(A) = \{0\}$.

2. En déduire que f admet un unique point de minimum global dans $\mathbf{R}^2$, où f est la fonction définie dans $\mathbf{R}^2$ par (1).

3. Montrer que $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (a_i x_1 + x_2 - b_i)^2$.

4. Donner une interprétation géométrique de la fonction f.

3 Exercice 3: moyenne et variance empiriques

Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. On suppose que les a_i ne sont pas tous égaux.

On considère le problème de maximisation $\max_{(m,\sigma)\in\mathbf{R}\times]0,+\infty[} g(m,\sigma)$ où

$$g(m,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(a_i - m)^2}{2\sigma^2}).$$

1. Montrer que le problème est équivalent à minimiser la fonction f définie par

$$f(m,\sigma) = -\log(g(m,\sigma)).$$

2. Montrer qu'il existe un unique point critique et le déterminer.

3. Montrer que ce point critique est un point de minimum local.

4 Exercice 4: fonction de Rosenbrock

On considère la fonction suivante définie dans $\mathbf{R}^2$, dite fonction de Rosenbrock:

$$f(x_1, x_2) = 100 * (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

1. Calculer le gradient de f en tout point $x = (x_1, x_2)$ et montrer qu'il existe un unique point critique.

2. Calculer le Hessien $H_f(x_1, x_2)$ en tout point (x_1, x_2) puis au point critique.

4. Vérifier que le Hessien au point critique est symétrique défini positif. Que peut-on en conclure ?

2. Montrer que le point critique est un point de minimum global.