Élève 1*

Question de cours. Qu'est-ce qu'un anneau principal ? Pour k un corps, $k[X]$ est-il principal ?

Exercice. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.
2. En déduire que P est de degré 1.
   Indication : raisonner par l'absurde et partir de $P(r) = 1/m$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et m un nombre premier.

Exercice. Soient k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension finie et F un k-espace vectoriel.

1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer les inégalités
$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$
2. Soient f et g des endomorphismes de E vérifiant $fg = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$.

Élève 1

Exercice CCP. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que $E = \operatorname{im} f \oplus \ker f \implies \operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$.
2. a) Démontrer que $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2 \iff \ker f = \ker f^2$.
   b) Démontrer que $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2 \implies E = \operatorname{im} f \oplus \ker f$.

Exercice. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et T la matrice triangulaire par blocs donnée par

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Justifier que T est inversible et donner son inverse.

Exercice. Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Démontrer que si le rationnel $r = p/q$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n. En déduire les racines du polynôme $3X^3 - 8X^2 + 8X - 5$.

Élève 2

Exercice CCP.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$.
   b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que a est racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \{1, \dots, r-1\}$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice. On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = \sin(x^n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n \geq 1}$ est libre dans E.

Élève 3

Exercice CCP. Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}^3,\ P \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   b) Exprimer les polynômes L_1, L_2, L_3 en fonciton de a_1, a_2 et a_3.
   c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
   d) **Application :** on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$ et $C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice. Soit B la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$$

Exprimer le rang de B en fonction du rang des A_i.

Exercice. On désigne par E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues. Soit F l'ensemble des éléments constants de E et G l'ensemble des éléments dont l'intégrale sur $[0, 1]$ nulle.

1. Vérifier que E, F et G sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Pour $f \in E$, déterminer la projection de f sur F parallèlement à G.