Élève 1*

Exercice (ENS 2014). Soit K un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère $\sigma(K)$ l'ensemble des valeurs propres complexes des matrices de K.

Montrer que $\sigma(K)$ est un compact de $\mathbb{C}$. Que dire si K est seulement supposé fermé ?

Élève 2*

Exercice (Mines-Ponts 2022). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des éléments nilpotents qui commutent deux à deux. Calculer $A_1 \times \dots \times A_n$.

Éléments de réponse. On procède par récurrence. Le résultat est clair si $n = 1$, la seule matrice nilpotente étant le scalaire 0. On suppose alors $n \geq 1$ et le résultat de l'énoncé vrai au rang $n-1$. On note u_i les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés aux A_i. Les endomorphismes u_i sont nilpotents et commutent deux à deux. Dans une base $\mathcal{B}$ correspondant à une base de $\ker u_1$ complétée, la matrice de u_1 est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \times \\ 0 & \times \end{pmatrix}$$

et comme les u_i stabilisent $\ker u_1$ puisqu'ils commutent avec u_1, la matrice de u_i pour $i \geq 2$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \times & \times \\ 0 & B_i \end{pmatrix}$$

Les matrices B_i sont encore nilpotentes et commutent encore deux à deux. Par hypothèse de récurrence, $B_2 \dots B_n = 0$ (les matrices B_i sont de taille au plus $n-1$ puisque $\ker u_1$ est non nul, u_1 étant nilpotente). Ainsi, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $u_2 \circ \dots \circ u_n$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \times & \times \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, le produit $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$ a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \times \\ 0 & \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \times & \times \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

□

Élève 3*

Exercice (Mines Ponts 2022). Soient A, B, C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$. Notons r le rang de la matrice C. Montrer que $\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \geq r$.

Éléments de réponse. D'abord, on montre très facilement que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$. Si on note

$$\chi_B = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{r_i}$$

alors, par le lemme des noyeaux et le théorème de Cayley-Hamilton

$$\mathbb{C}^n = \ker \chi_B(B) = \bigoplus_{i=1}^{m} (B - \lambda_i I_n)^{r_i} \qquad (1)$$

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$ une base adaptée à la somme (1) et P la matrice inversible dont les colonnes sont les éléments de $\mathcal{B}$. Par inversibilité de P, $\operatorname{rg} CP = \operatorname{rg} C$, il existe alors $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ de cardinal r tel que l'image par C de $\mathcal{C}$ soit une famille libre. On peut voir que si $x \in \mathcal{C}$, il existe $i = 1, \dots, m$ tel que $x \in \ker(B - \lambda_i I_n)^{r_i}$, de sorte que, comme $(A - \lambda_i I_n)^{r_i} C = C(B - \lambda_i I_n)^{r_i}$, $Cx \in \ker(A - \lambda_i I_n)^{r_i}$. On a

$$\{0\} \subsetneq \ker(A - \lambda_i I_n) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda_i I_n)^k = \ker(A - \lambda_i I_n)^{k+1} = \dots$$

où k est le plus petit indice s tel que $\ker(A - \lambda_i I_n)^s = \ker(A - \lambda_i I_n)^{s+1}$. Comme Cx fait partie d'une famille libre, il est non nul, donc l'indice k n'est pas nul (car sinon $\ker(A-\lambda_i I_n)^{r_i} = \{0\}$) et alors $\ker(A-\lambda_i I_n) \neq \{0\}$ et λ_i est valeur propre de A. On peut introduire r_i' la multiplicité de λ_i en tant que racine de χ_A. On a $r_i' = \dim\ker(A-\lambda_i I_n)^{r_i'} = \dim\ker(A-\lambda_i I_n)^k \geq \dim\ker(A-\lambda_i I_n)^{r_i} \geq \operatorname{Card}\mathcal{B}_i\cap\mathcal{C}$. En particulier, $(X-\lambda_i)^{\operatorname{Card}\mathcal{B}_i\cap\mathcal{C}}$ divise χ_A et χ_B.

Comme ceci vaut pour tout i tel que $\operatorname{Card}\mathcal{B}_i\cap\mathcal{C}\neq 0$, on a

$$\prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)^{\operatorname{Card}\mathcal{B}_i\cap\mathcal{C}} = \prod_{\substack{i=1\\ \operatorname{Card}\mathcal{B}_i\cap\mathcal{C}\neq 0}}^{m}(X-\lambda_i)^{\operatorname{Card}\mathcal{B}_i\cap\mathcal{C}} \quad \text{divise} \quad \chi_A\wedge\chi_B$$

Finalement

$$\boxed{\deg\chi_A\wedge\chi_B \geq \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Card}\mathcal{B}_i\cap\mathcal{C} = \operatorname{Card}\mathcal{C} = r}$$

□

Élève 4

Exercice CCP. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2-f-2\,\mathrm{id}_E=0$.

1. Prouver que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E=\ker(f+\mathrm{id}_E)\oplus\ker(f-2\,\mathrm{id}_E)$ de deux manières différentes.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\operatorname{im}(f+\mathrm{id}_E)=\ker(f-2\,\mathrm{id}_E)$.

Exercice (Mines-Ponts 2022, adapté). Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

1. Montrer que $A^n=0$ en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Calculer $\det(A+I_n)$.
3. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM=MA$. Démontrer qu'il existe une suite (M_p) de matrices inversibles, commutant avec A, et qui converge vers M. En déduire que $\det(A+M)=\det M$.

Élève 5

Exercice CCP. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-ev E.

1. Soit λ un réel non nul. Montrer que λ est vp de uv ssi λ est vp de vu.
2. Dans cette question, $E=\mathbb{R}[X]$, $u(P)$ désignera la primitive de P nulle en 1, $v(P)$ le polynôme dérivé de P. Déterminer $\ker(uv)$ et $\ker(vu)$. Discuter le résultat de la première question pour $\lambda=0$.
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda=0$.

Exercice. Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $[0,1]$ par

$$T(f)(x)=\int_0^1\min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Monter que $T\in\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Élève 6

Exercice CCP. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n\geq 1$ et u un endomorphisme de E annulé par X^3+X^2+X.

1. Montrer que $\operatorname{im}u\oplus\ker u=E$.
2. Rappeler le lemme des noyeaux pour deux polynômes et en déduire que $\operatorname{im}u=\ker(u^2+u+\mathrm{id}_E)$.

3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice (Mines Ponts 2022, adapté). Soient A, B, C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$. Notons r le rang de la matrice C.

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$.
2. On note
$$\chi_B = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{r_i}$$
On note également, pour $i = 1, \dots, m$, $N_i = \ker(B - \lambda_i I_n)^{r_i}$.
Justifier que
$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i \tag{1}$$
3. Montrer que pour tout i et pour tout $x \in N_i$, $Cx \in \ker(A - \lambda_i I_n)^{r_i}$.
4. En prenant une base adaptée à la somme (1), en déduire que le pgcd de χ_A et χ_B est de degré plus grand que r.