CALCUL DES COEFFICIENTS DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE D'UNE MATRICE

AMAR AHMANE

1. Polynôme caractéristique d'une matrice

Objet bien connu des préparationnaires, il est introduit en cours d'Algèbre et permet entre autres d'accéder aux valeurs propres de la matrice dans des cas pratiques simples (on ne sait pas toujours déterminer l'ensemble des racines d'un polynôme). Sa définition ne fait pas intervenir ses coefficients, il est introduit comme le déterminant $\det(XI_n - A)$, et souvent seuls deux coeffitients sont explicités, l'un proportionnel à la trace, l'autre au déterminant. Connaître l'expression explicite de tous ses coefficients peut s'avérer utile dans certains exercices théoriques qui font intervenir les mineurs principaux, notamment dans la preuve de la propriété suivante

Proposition 1. *Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique.*
Pour tout $I \subset \{1,\ldots,n\}$, on note $M_I = (m_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$. Alors M est positive si et seulement $\det M_I \geqslant 0$ pour tout I.

2. Le gros calcul

Proposition 2. *Soit $n \geqslant 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On note*

$$P_A = \det(XI_n - A) = X^n - \beta_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}X + (-1)^n \beta_n$$

Alors pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\beta_i = \sum_{I\in\mathcal{P}_i(\{1,\ldots,n\})} \det(a_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$$

Preuve On commence par calculer $\det(A + xI_n)$ pour $x \in \mathbb{K}$. On pourra récupérer facilement les coefficients à partir de ceux de $\det(A + XI_n)$ en remarquant que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P_A(x) = (-1)^n \det(A + (-x)I_n)$$

Cela évitera de se trimballer des puissances de -1 dans des calculs qui sont déjà assez longs. Le point de départ est d'écrire la formule du déterminant. Soit $x \in \mathbb{K}$, on a

$$\det(A + xI_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} [A + xI_n]_{\sigma(j),j}$$

l'idée étant de réecrire cette somme en partitionnant S_n selon le support des permutations, et l'ensemble des supports (qui correspond à l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$) selon leur cardinal. On écrit donc

$$\det(A + xI_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\ldots,n\})} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \mathrm{Supp}(\sigma)=I}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} [A + xI_n]_{\sigma(j),j}$$

On remarque ensuite que pour $\sigma \in S_n$, alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, si $j \in \mathrm{Supp}(\sigma)$, alors $[A + xI_n]_{\sigma(j),j} = a_{\sigma(j),j}$, sinon $[A + xI_n]_{\sigma(j),j} = a_{\sigma(j),j} + x$. Le produit présent dans $(*)$ peut alors se réecrire, pour $\sigma \in S_n$ de support I

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}[A + xI_n]_{\sigma(j),j} &= \prod_{j\in I} a_{\sigma(j),j} \prod_{j\notin I}(a_{\sigma(j),j} + x) \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} \underbrace{\left(\sum_{X\in\mathcal{P}_{n-k-l}(^cI)} \prod_{j\in X} a_{j,j} \prod_{j\in I} a_{\sigma(j),j} \right)}_{:=\alpha_{l,I}} x^l\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\det(A + xI_n) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \mathrm{Supp}(\sigma)=I}} \varepsilon(\sigma)\alpha_{l,I}x^l$$

En remarquant que les parties de $\{0, \dots, n\}^2$ suivantes sont égales

$$\{(l, k)|\ 0 \leqslant l \leqslant n - k\ \wedge\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = \{(l, k)|\ 0 \leqslant k \leqslant n - l\ \wedge\ 0 \leqslant l \leqslant n\}$$

on peut interveritr les deux premières sommes et ainsi écrire

$$\det(A + xI_n) = \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-l} \sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \mathrm{Supp}(\sigma)=I}} \varepsilon(\sigma)\alpha_{l,I} \right) x^l$$

Clairement, si $I = \mathrm{Supp}(\sigma)$ pour $\sigma \in S_n$, $\sigma(I) = I$, donc pour toute partie X de ^cI, $\sigma_{|I\cup X} \in S_{X\cup I}$. Il vient alors que pour tout $0 \leqslant l \leqslant n$ et pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$,

$$\alpha_{l,I} = \sum_{X\in\mathcal{P}_{n-k-l}(^cI)} \prod_{j\in I\cup X} a_{\sigma_{|I\cup X}(j),j}$$

À ce stade, pour $0 \leqslant l \leqslant n$, on peut poser, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n - l$ et pour toute partie $I \in \mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\})$

$$A_{k,I} = \left\{\sigma,\ \sigma \in S_{I\cup X},\ \mathrm{Supp}(\sigma) = I,\ X \in \mathcal{P}_{n-k-l}(^cI)\right\}$$

Et on montre facilement par double-inclusion que

$$\bigcup_{k=0}^{n-l} \bigcup_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})} A_{k,I} = \bigcup_{J\in\mathcal{P}_{n-L}(\{1,\dots,n\})} S_J$$

Si bien que, toutes les unions écrites étant disjointes,

$$\sum_{k=0}^{n-l} \sum_{I \in \mathcal{P}_k(\{1,\ldots,n\})} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \mathrm{Supp}(\sigma)=I}} \varepsilon(\sigma)\alpha_{l,I} = \sum_{J \in \mathcal{P}_{n-l}(\{1,\ldots,n\})} \sum_{\sigma \in S_J} \varepsilon(\sigma) \prod_{j \in J} a_{\sigma(j),j}$$

$$= \sum_{J \in \mathcal{P}_{n-l}(\{1,\ldots,n\})} \det(a_{i,j})_{(i,j)\in J^2}$$

D'où, finalement,

$$\det(A + xI_n) = \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{J \in \mathcal{P}_{n-l}(\{1,\ldots,n\})} \det(a_{i,j})_{(i,j)\in J^2} \right) x^l$$

$\square$

Remarque 3. On retrouve bien que le coefficient devant X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$, et celui devant 1 est $(-1)^n$. En effet

- le coefficient devant X^{n-1} est $-\beta_1 = -\sum_{J \in \mathcal{P}_1(\{1,\ldots,n\})} \det(a_{i,j})_{(i,j)\in J^2} = -\sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = -\mathrm{tr}(A)$;
- le coefficient devant 1 est $(-1)^n\beta_n = (-1)^n \sum_{J \in \mathcal{P}_n(\{1,\ldots,n\})} \det(a_{i,j})_{(i,j)\in J^2} = (-1)^n \det A$.