FAMILLES SOMMABLES

AMAR AHMANE

1. Éléments de Théorie des familles sommabes – très bref –

Une manière d'introduire ce chapitre est de parler de l'action des permutations sur les termes généraux de séries convergentes. Une question naturelle à se poser est de se demander si l'ordre de sommation est important dans une série, et on s'apperçoit sans trop de difficulté qu'en général changer l'ordre de sommation perturbe la nature et/ou la valeur de la somme.

Il est d'ailleurs possible de prouver un résultat plutôt impressionant portant sur les séries semi-convergentes dans $\mathbf{R}$, qui est le suivant :

Proposition 1. *Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que la série $\sum u_n$ est semi-convergente (i.e convergente mais pas absolument convergente). Alors, pour tout $x \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, il existe $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une bijection vérifiant*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = x$$

dont on proposera, en bonus, une démonstration à la fin de ce document. Ce n'est cependant pas toujours le cas. Les séries absolument convergentes dans un espace de Banach, donc convergentes, sont une exception et perturber l'ordre de sommation ne change ni la nature de la série ni la valeur de sa somme. De tels objets sont intéressants, puisque dans plein de situations, on n'a pas réellement envie de se prendre la tête avec l'ordre de sommation, par exemple en probabilités, où l'on ne veut pas accorder d'importance à l'ordre de sommation dans la somme définissant l'espérence d'une variable aléatoire par exemple.

Dans toute la suite, E désignera un espace de Banach, I un ensemble non vide.

1.1. **Définitions.**

Définition 2. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable s'il existe un élément $U \in E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists I_0 \in \mathcal{P}_f(I),\ \forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_0 \subset J \Longrightarrow \left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| \leqslant \varepsilon$$

Si elle existe, U est notée $\sum_{i\in I} u_i$.

Définition 3. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une fammille d'éléments de E. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est absolument sommable si $(\|u_i\|)_{i\in I}$ est sommable.

1.2. **Premières propriétés.** On donne d'abord une propriété équivalente à la définition 3 :

Proposition 4. *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une fammille d'éléments de* E*. Alors*

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est absolument sommable} \iff \text{l'ensemble } \left\{\sum_{j\in J}\|u_j\|\,,\ J\in\mathcal{P}_f(I)\right\} \text{ est borné}$$

Preuve En effet, on procède par double implication :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est absolument sommable. Il existe alors $I_0\in\mathcal{P}_f(I)$ tel que

$$\forall J\in\mathcal{P}_f(I),\quad I_0\subset J\Longrightarrow\left|\sum_{j\in J}\|u_j\|-\sum_{i\in I}\|u_i\|\right|\leqslant 1$$

Soit alors $J\in\mathcal{P}_f(I)$. Deux cas se présentent, soit $I_0\subset J$, et dans ce cas $\sum_{j\in J}\|u_j\|\leqslant 1+\sum_{i\in I}\|u_i\|$. Sinon, on pose $K=I_0\cup J$, et alors $I_0\subset K$, donc

$$\sum_{j\in J}\|u_j\|\leqslant\sum_{k\in K}\|u_k\|\leqslant\sum_{i\in I}\|u_i\|+1$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que l'ensemble

$$\left\{\sum_{j\in J}\|u_j\|\,,\ J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}$$

est borné, notons-le A. On pose $U=\sup A$, qui existe car A est non vide car I est non vide, et borné par hypothèse. Soit $\varepsilon>0$. Par caractérisation de la borne suppérieure il existe $I_0\in\mathcal{P}_f(I)$ tel que

$$U-\varepsilon<\sum_{j\in I_0}\|u_j\|\leqslant U$$

Si $J\in\mathcal{P}_f(I)$ tel que $I_0\subset J$, alors

$$U-\varepsilon<\sum_{j\in I_0}\|u_j\|\leqslant\sum_{j\in J}\|u_j\|\leqslant U<U+\varepsilon$$

Ceci valant pour tout ε, on a bien montré que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est absolument sommable (notons que dans la définition, l'inégalité large peut être remplacée par une inégalité stricte).

$\square$

Dans notre définition, on ne donne aucune condition particulière sur I, qui peut être fini, dénomobrable, ou non-dénombrable. Cependant, la sommabilité d'une famille indexée par I en impose une sur l'enseble des éléments de I indiçant des éléments non nuls de la famille.

Proposition 5. *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* E *sommable. Alors l'ensemble* $\{i\in I,\ u_i\neq 0\}$ *est au plus dénombrable.*

Preuve En effet, supposons que $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ n'est pas fini, on le note A. On a également

$$A = \{i \in I,\ \|u_i\| \neq 0\}$$

par sépration de la norme. Pour $\varepsilon > 0$, on note $A_\varepsilon = \{i \in I,\ \|u_i\| \geqslant \varepsilon\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, A_ε est fini. En effet, soit $\varepsilon > 0$, et $\frac{\varepsilon}{2} > \delta > 0$; comme la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, il existe $I_0 \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_0 \subset J \Longrightarrow \left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| \leqslant \delta$$

On va montrer que $A_\varepsilon \subset I_0$. On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe $i \in A_\varepsilon$ tel que $i \notin I_0$. Dans ce cas

$$\delta \geqslant \left\| \sum_{j\in I_0\cup\{i\}} u_j - U \right\| = \left\| u_i + \sum_{j\in I_0} u_j - U \right\| \geqslant \|u_i\| - \left\| \sum_{j\in I_0} u_j - U \right\| \geqslant \|u_j\| - \delta$$

d'où que $\varepsilon > 2\delta \geqslant \|u_j\|$, ce qui n'est pas, donc $A_\varepsilon \subset I_0$ qui est fini.

On écrit ensuite que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} A_{\frac{1}{n}}$$

Ainsi A est réunion dénombrable de parties au plus dénombrables, donc est au plus dénombrable. □

Comme on est plongé dans un espace de Banach, on s'attend à un résultat analogue à celui des séries absolument convergentes. On observe donc la propriété suivante :

Proposition 6. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Si $(u_i)_{i\in I}$ est absolument sommable, alors elle est sommable.*

Preuve On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est absolument sommable. D'où

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists I_0 \in \mathcal{P}_f(I),\ \forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_0 \subset J \Longrightarrow \left| \sum_{j\in J} \|u_j\| - \sum_{i\in I} \|u_i\| \right| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, pour $n \in \mathbf{N}$, il existe $I_n \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_n \subset J \Longrightarrow \left| \sum_{j\in J} \|u_j\| - \sum_{i\in I} \|u_i\| \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad (*)$$

On pose $U_n = \sum_{i\in I_n} u_i$. Pour $p, q \in \mathbf{N}$, on a

$$\|U_p - U_q\| = \left\| \sum_{i\in I_p\setminus I_q} u_i \right\| \leqslant \sum_{i\in I_p\setminus I_q} \|u_i\| = \sum_{i\in I_p} \|u_i\| - \sum_{i\in I_q} \|u_i\| \leqslant \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}$$

On en déduit que la suite $(U_n)_n$ est de Cauchy, or E étant de Banach, on en déduit que $(U_n)_n$ converge, notons U sa limite. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ \|U_n - U\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $n \geqslant n_0$ et $J \subset I_n$, alors

$$\left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| \leqslant \left\| \sum_{j\in J} u_j - U_n \right\| + \|U_n - U\| \leqslant \sum_{j\in J\setminus I_n} \|u_j\| + \frac{\varepsilon}{3}$$

Or

$$\sum_{j\in J\setminus I_n} \|u_j\| \leqslant \left| \sum_{j\in J} \|u_j\| - \sum_{j\in I_n} \|u_j\| \right| \leqslant \left| \sum_{j\in J} \|u_j\| - \sum_{i\in I} \|u_j\| \right| + \left| \sum_{j\in I_n} \|u_j\| - \sum_{j\in I} \|u_j\| \right|$$

Et d'après (*), on a, vu que $J \subset I_n$ et $I_n \subset I_n$,

$$\left| \sum_{j\in J} \|u_j\| - \sum_{i\in I} \|u_j\| \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{j\in I_n} \|u_j\| - \sum_{j\in I} \|u_j\| \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Finalement,

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_n \subset J \Longrightarrow \left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| \leqslant \frac{2}{n+1} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Or, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\frac{2}{n_1+1} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$, soit

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_{n_1} \subset J \Longrightarrow \left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Notons que la réciproque est vraie lorsque E est de dimension finie.

1.3. **Résultats en lien avec les séries numériques.** On appelle série commutativement convergente une série $\sum u_n$ convergente telle que pour toute bijection $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge. Dans un espace de Banach, les séries absolument convergentes sont commutativement convergente.

Proposition 7. *Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E telle que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Alors $\sum u_n$ est commutativement convergente, et pour toute bijection $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

Preuve En effet, soit $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une bijection. Il vient alors que, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Ceci montre que $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, donc convergente puisqu'elle est à valeurs dans E complet. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \|u_k\| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\{0, \ldots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n_1)\}$, on a alors

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} \right\| &\leqslant \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n_0} u_k - \sum_{k=0}^{n_1} u_{\sigma(k)} \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n_1} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} \right\| \\
&\leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \|u_k\| + \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n_1\} \\ \sigma(k)>n_0}} \|u_k\| + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \left\|u_{\sigma(k)}\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \|u_k\| + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \|u_k\| + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \|u_k\| \leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré le résultat. $\square$

On montre à présent deux résultats permettant de voir les termes généraux de séries absolument convergentes comme des familles sommables.

Proposition 8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors*

$$\sum u_n \text{ absolument convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ absolument sommable}$$

Preuve En effet, si $\sum u_n$ converge absolument, alors pour tout $J \in \mathcal{P}_f(\mathbf{N})$, on a

$$\sum_{j\in J} \|u_j\| \leqslant \sum_{j=0}^{\sup J} \|u_j\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

ce qui conclut à l'absolue sommabilité de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'après la proposition 4.

Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est absolument sommable, il existe, toujours d'après la proposition 4, un réel M tel que pour tout $J \in \mathcal{P}_f(\mathbf{N})$,

$$\sum_{j\in J} \|n_j\| \leqslant M$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \|u_k\| \leqslant M$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\| < +\infty$$

$\square$

Pour conclure cette sous-partie, une caractérisation des séries commutativement convergente. On aura d'abord besoin du Lemme suivant :

Lemme 9. *Soit $(x_n) \in E^{\mathbf{N}}$. On suppose que $\sum x_n$ est commutativement convergente. Alors pour toute bijection $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, il vient*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$$

Preuve Soit une bijection $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. D'abord, vu que $\sum x_n$ converge, on a

$$\exists N_0 \geqslant 0,\ \forall N \in \mathbf{N}, \quad N \geqslant N_0 \Longrightarrow \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \varepsilon$$
$$\exists N_1 \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant N_1 \Longrightarrow \|x_n\| \leqslant \varepsilon$$

Puis, vu que $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente, on a

$$\exists N_2 \geqslant 0,\ \forall N \in \mathbf{N}, \quad N \geqslant N_2 \Longrightarrow \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} x_{\sigma(n)} \right\| \leqslant \varepsilon$$

□

Proposition 10. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. La série $\sum u_n$ est commutativement convergente si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable.*

Preuve En effet, supposons que $\sum u_n$ est commutativement convergente. Notons U sa somme. On procède par l'absurde et on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas sommable, on écrit alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall I_0 \in \mathcal{P}_f(I),\ \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_0 \subset J \ \wedge \ \left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| > \varepsilon \qquad (*)$$

On construit une bijection $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de la façon suivante :

- Posons $m_0 = 0$ et $\sigma(0) = 0$.
- Pour $n \in \mathbf{N}$, en supposant $m_0 < m_1 < \cdots < m_n$ et $\sigma(0), \ldots, \sigma(m_n)$ construits tels que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$

  $$\operatorname{Card}\{\sigma(0), \ldots, \sigma(m_i)\} = m_i + 1 \quad \text{et} \quad \{0, \ldots, i\} \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(m_i)\}$$

  et

  $$\left\| \sum_{k=0}^{m_i} u_{\sigma(k)} - U \right\| > \varepsilon$$

  on pose, si $i+1 \in \{\sigma(0), \ldots, \sigma(m_n)\}$, $\sigma(m_n+1) = m_n+1$, sinon $\sigma(m_n+1) = i+1$, et $K = \{\sigma(0), \ldots, \sigma(m_n+1)\}$. D'après (*), il existe $J \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que $K \subset J$ et

  $$\left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| > \varepsilon$$

  On note $J \backslash K = \{x_1, \ldots, x_p\}$ où $p = \operatorname{Card} J\backslash K$ avec $x_1 < \cdots < x_p$, et on pose pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\sigma(m_n + 1 + i) = x_i$ et $m_{n+1} = m_n + 1 + p > m_n$, de sorte que

  $$\left\| \sum_{k=0}^{m_{n+1}} u_{\sigma(k)} - U \right\| > \varepsilon$$

Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable, de somme notée U, alors, si $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une bijection, alors, si $\varepsilon > 0$, il existe $I_0 \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad I_0 \subset J \Longrightarrow \left\| \sum_{j\in J} u_j - U \right\| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $I_0 \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n_0)\}$. Pour tout $n \geqslant n_0$, $I_0 \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n_0)\} \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$, donc

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left\| \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - U \right\| \leqslant \varepsilon$$

$\square$