Sur le critère de Weyl

Amar AHMANE

1. Polynômes trigonométriques

Définition 1. *On appelle polynôme trigonométrique de degré* $\leq N$ $(N \in \mathbb{N})$ *de la variable réelle* x *toute fonction de la forme* $x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ $(c_n \in \mathbb{C})$

Les polynômes trigonométriques sont des fonctions continues 2π-périodiques.

Définition 2. *On définit les coefficients de Fourier d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continue* 2π*-périodique par*

$$\forall n \in Z, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Notation : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = \exp(ikx)$$

Lemme 1. *Pour tout* $n, N \in \mathbb{N}$, *on considère les fonctions*

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k, \qquad \sigma_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{n} S_n$$

Alors, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, *la suite de fonctions* (σ_N) *converge uniformément vers* 0 *sur* $[-\pi, \pi] \backslash [-\alpha, \alpha]$.

Démonstration. En effet, ce résultat vient du clacul de $\sigma_N(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors d'abord pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e_k(x) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \exp(ix)^k + \sum_{k=0}^{n} \exp(-ix)^k - 1 \\
&= \frac{1 - \exp(i(n+1)x)}{1 - \exp(ix)} + \frac{1 - \exp(-i(n+1)x)}{1 - \exp(-ix)} - 1 \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \exp\left(\frac{nx}{2}\right) + \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \exp\left(\frac{-nx}{2}\right) - 1 \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1
\end{aligned}$$

Puis $2\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et finalement

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

C'est le noyeau de Dirichlet. Ensuite, on a, pour $N \geq 0$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \exp\left(\frac{i(2n+1)x}{2}\right) &= \exp(ix/2)\sum_{n=0}^{N}\exp(inx) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\exp\left(\frac{i(N+1)x}{2}\right)\end{aligned}$$

En prenant la partie imaginaire et en multipliant par $\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ on obtient

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

C'est le noyeau de Féjer.
Soit alors $0 < \alpha < \pi$. Pour $N \geq 0$, il vient que

$$\forall x \in [-\pi, \pi]\backslash[-\alpha, \alpha], \quad |\sigma_N(x)| \leq \frac{1}{(N+1)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

On majore alors uniforément σ_N sur $[-\pi, \pi]\backslash[-\alpha, \alpha]$ par une quantité tendant vers 0, d'où le résultat *wink*. $\square$

Notation : Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique, on note pour tous entiers naturels n, N

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k, \qquad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$$

Théorème 3. *(de Féjer) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique. Alors la suite de fonctions $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. En effet, on commence par remarquer que

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sigma_N(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

du fait que

$$\begin{aligned}S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k(x) \\ &= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e_k(-y)\mathrm{d}y\right)e_k(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e_k(-y)e_k(x)\right)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(x-y)f(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $z = x - y$ dans l'intégrale de la relation (1), et on trouve

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} f(x-z)\sigma_N(z)\mathrm{d}z$$

Or, l'application $\varphi : z \to f(x-z)\sigma_N(z)$ est périodique en tant que produit de telles fonctions, et alors, si on pose $A(t) = \int_{t-2\pi}^{t} \varphi(z)\mathrm{d}z$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors A est dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu du TFA et $A'(t) = 0$ porut tout $t \in \mathbb{R}$ en vertu de la 2π-périodicité de φ, et alors A est constante soit $A(x) = A(\pi)$ et donc finalement

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\sigma_N(y)\mathrm{d}y$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ puisque 2π-périodique (preuve ici), on peut alors choisir $\alpha \in]0, \pi[$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Posons $M = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{N} \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-y))\sigma_N(y)\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\alpha} |f(x) - f(x-y)||\sigma_N(y)|\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} |f(x) - f(x-y)||\sigma_N(y)|\mathrm{d}y \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x) - f(x-y)||\sigma_N(y)|\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

D'abord, pour $y \in [-\alpha, \alpha]$, $|x - y - x| = |y| \leq \alpha$ donc $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon$ par uniforme continuité d'où $\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x) - f(x-y)||\sigma_N(y)|\mathrm{d}y \leq \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} |\sigma_N(y)|\mathrm{d}y \leq \varepsilon$. Ensuite, comme σ_N converge uniforément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \backslash [-\alpha, \alpha]$, il existe $N_0 \geq 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]\backslash[-\alpha,\alpha]} |\sigma_N(y)| \leq \varepsilon$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\alpha} |f(x) - f(x-y)||\sigma_N(y)|\mathrm{d}y \leq \frac{M}{\pi}\varepsilon(\pi - \alpha) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} |f(x) - f(x-y)||\sigma_N(y)|\mathrm{d}y \leq \frac{M}{\pi}\varepsilon(\pi - \alpha)$$

Finalement pour tout $N \geq N_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors

$$|f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leq (2M + 1)\varepsilon$$

D'où le résultat.

□

Corollaire 1. *Toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue vérifiant $f(0) = f(1)$ est uniformément approchée par une suite de polynômes trigonométriques.*

Démonstration. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue vérifiant $f(0) = f(1)$. On peut par dilatation se ramener à une fonction $\tilde{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ telle que $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$. On peut considérer alors l'unique fonction périodique g telle que $g_{|[0,2\pi]} = \tilde{f}$. g est approchée uniformément par une suite de polynômes tirogonométriques, donc $\tilde{f} = g_{|[0,2\pi]}$ également par restriction, puis f par dilatation. □

2. Preuve du critère de Weyl

Notation : Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $[0,1]$, on décide de noter, pour tout entier $N \geq 1$ et toute sous-ensemble non vide $Y \subset [0,1]$

$$\gamma(N,(x_n),Y) = \frac{1}{N}\operatorname{Card}\{1 \leq n \leq N \mid x_n \in Y\}$$

On dit que $(x_n)_{n\geq 1}$ est équipartie si

$$\forall 0 \leq a < b \leq 1, \quad \lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[a,b]) = b-a$$

Notation : Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contiue telle que $f(0) = f(1)$, on note pour $M \in \mathbb{N}^*$

$$\Phi_M(f) = \sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right) \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{M},\frac{k+1}{M}\right[} + f(1)\mathbb{1}_{\{1\}}$$

Proposition 1. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \geq 1$ tel que*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. En effet, f est continue sur le segment $[0,1]$, donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x,y \in [0,1], \ |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

On choist $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{M} \leq \eta$. Soit $x \in [0,1]$, si $x < 1$ il existe un unique $k \in \{0,\dots,M-1\}$ tel que $x \in \left[\frac{k}{M},\frac{k+1}{M}\right[$ et on a $\Phi_M(f)(x) = f\left(\frac{k}{M}\right)$ et $\left|x - \frac{k}{M}\right| \leq \frac{1}{M} \leq \eta$ donc $|f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leq \varepsilon$, sinon $x = 1$ et $|f(x) - \Phi_M(f)(x)| = 0 \leq \varepsilon$. Ceci valant pour tout $x \in [0,1]$ on a bien le résultat voulu.
Remarquons que tout entier $M' \geq M$ vérifie la condition voulue car $\frac{1}{M'} \leq \frac{1}{M} \leq \eta$. □

Lemme 2. *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $[0,1]$. Alors (x_n) est équipartie si et seulement si*

$$\forall 0 \leq a < b \leq 1, \quad \lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[a,b[) = b-a$$

Démonstration. En effet, on suppose (x_n) équipartie et soit $0 \leq a < b \leq 1$, alors pour tout $N \geq 1$

$$\gamma(N,(x_n),[a,b[) \leq \gamma(N,(x_n),[a,b])$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $b - \varepsilon > a$

$$\gamma(N,(x_n),[a,b[) \geq \gamma(N,(x_n),[a,b-\varepsilon])$$

pour tout ε adapté, et à partir d'un certain rang N_0, on obtient, en vertu de l'hypothèse de départ

$$b - a - 2\varepsilon \leq \gamma(N,(x_n),[a,b[) \leq b - a + \varepsilon$$

ce qui permet de conclure pour le sens direct.
Réciproquement, soit $0 \leq a < b \leq 1$, alors pour tout $N \geq 1$

$$\gamma(N,(x_n),[a,b[) \leq \gamma(N,(x_n),[a,b])$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $b + \varepsilon \leq 1$

$$\gamma(N,(x_n),[a,b+\varepsilon[) \geq \gamma(N,(x_n),[a,b])$$

et on conclut comme plus haut. □

Lemme 3. *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite équipartie. Alors*

$$\lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),\{1\}) = 0$$

Démonstration. En effet,

$$\gamma(N,(x_n),[0,1]) = \gamma(N,(x_n),[0,1[) + \gamma(N,(x_n),\{1\})$$

On conclut en passant à la limite et en utilisant le Lemme précédent. □

Théorème 4. *Soit (x_n) une suite à valeurs dans $[0,1]$. Alors les psse*

i) (x_n) *est équipartie.*

ii) *Pour toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0)=f(1)$,*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

iii) $\forall p\in\mathbb{Z}^*$, $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2i\pi p x_n) = 0$

Démonstration. On entame une preuve par chaîne d'implications.

$\boxed{i) \implies ii)}$ Supposons (x_n) équipartie. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f(1)$. Soit $\varepsilon>0$ et $M'\geq 1$ comme dans la proposition 1. D'après un résultat sur les sommes de Riemann, on peut choisir $M\geq M'$ tel que

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} f\left(\frac{k}{M}\right)\right| \leq \varepsilon$$

On a, pour tout $N\in\mathbb{N}$

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right| \leq \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n)\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n)-\Phi_M(f)(x_n))\right|$$

Or, d'une part

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n)-\Phi_M(f)(x_n))\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\underbrace{|f(x_n)-\Phi_M(f)(x_n)|}_{\leq\varepsilon} \leq \varepsilon$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n) &= \sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right)\mathbb{1}_{\left[\frac{k}{M},\frac{k+1}{M}\right[}(x_n) + f(1)\mathbb{1}_{\{1\}}(x_n)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right)\sum_{n=1}^{N}\mathbb{1}_{\left[\frac{k}{M},\frac{k+1}{M}\right[}(x_n) + f(1)\sum_{n=1}^{N}\mathbb{1}_{\{1\}}(x_n) \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right) N\gamma\left(N,(x_n),\left[\frac{k}{M},\frac{k+1}{M}\right[\right) + N\gamma(N,(x_n),\{1\})
\end{aligned}$$

Si bien que, en utilisant les Lemmes 2 et 3,

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n)\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right)\frac{1}{M}\right|$$

Il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n)\right| \leq \varepsilon + \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right)\right|$$

Or, ayant $f(0) = f(1)$, on remarque que $\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} f\left(\frac{k}{M}\right)$ et donc pour tout $N \geq N_0$

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n)\right| \leq 2\varepsilon$$

Finalement, pour tout $N \geq N_0$

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

— $\boxed{ii) \Longrightarrow iii)}$ Soit $p \in \mathbb{Z}^*$. On va montrer que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi p x_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Ici on pose $f : x \in [0,1] \to \cos(2\pi p x)$ qui vérifie bien les conditions de *ii)* et on a alors par hypothèse

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi p x_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$$

On procède de même pour montrer que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin(2k\pi p x_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Et on en conclut que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\exp(2k\pi p x_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$\boxed{iii) \Longrightarrow i)}$ Soit $0 < a < b < 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit deux applications f_ε^+ et f_ε^- telles que

$$f_\varepsilon^- \leq \mathbb{1}_{[a,b]} \leq f_\varepsilon^+ \tag{1}$$

et telles que $f_\varepsilon^-(0) = f_\varepsilon^-(1) = f_\varepsilon^+(0) = f_\varepsilon^+(1) = 0$ et

$$\int_0^1 f_\varepsilon^- = b - a - \varepsilon, \qquad \int_0^1 f_\varepsilon^+ = b - a + \varepsilon$$

D'après le corollaire 1, il existe des suites (P_m) et (Q_m) de polynômes trigonométriques convergeant uniformément respectivement vers f_ε^+ et f_ε^- sur $[0,1]$.
On a alors pour $N \geq 1$ et $m \geq 1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(x_n) - \int_0^1 f_\varepsilon^+\right| &\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_m(x_n)\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_m(x_n) - \int_0^1 P_m\right| \\ &\quad + \left|\int_0^1 f_\varepsilon^+ - \int_0^1 P_m\right| \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f_\varepsilon^+(x_n) - P_m(x_n)| + \int_0^1 |f_\varepsilon^+ - P_m| \\ &\quad + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_m(x_n) - \int_0^1 P_m\right|\end{aligned}$$

Pour m assez grand, $|f_\varepsilon^+(x_n) - P_m(x_n)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. On choisit un tel m, et par hypothèse et par linéarité, à partir d'un certain rang N_0,

$$\forall N \geq N_0, \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_m(x_n) - \int_0^1 P_m \right| \leq \varepsilon$$

Si bien que pour tout $N \geq N_0$, on a

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(x_n) - \int_0^1 f_\varepsilon^+ \right| \leq 3\varepsilon$$

et on procède de même pour f_ε^-, et on note N_1 un rang à partir duquel

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(x_n) - \int_0^1 f_\varepsilon^+ \right| \leq 3\varepsilon, \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^-(x_n) - \int_0^1 f_\varepsilon^- \right| \leq 3\varepsilon$$

Pour $N \geq N_1$, on moyenne la relation (1) pour avoir

$$\int_0^1 f_\varepsilon^- - 3\varepsilon \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^- \leq \gamma(N, (x_n), [a,b]) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(x_n) \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+ + 3\varepsilon$$

Soit pour tout $N \geq N_1$

$$b - a - 4\varepsilon \leq \gamma(N, (x_n), [a,b]) \leq b - a + 4\varepsilon$$

Les cas où $0 \leq a < b \leq 1$ se déduisent facilement des cas $0 < a < b < 1$.

$\square$

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête, tome d'Analyse*, Ellipses, Paris, 2008.

[2] *Épreuve de mathématiques C, concours ENS* (2017).