ENDOMORPHISMES DE $(\mathbf{R},+)$ MESURABLES

Dans toute la suite, le cadre est $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue, pour un certain $d \in \mathbf{N}$.

Exercice 1. *Montrer que la mesure de Lebesgue sur $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ est régulière.*

Exercice 2 (Théorème de Steinhaus)**.** *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ un borélien non négligeable.*

Montrer que $A - A := \{a_1 - a_2;\ a_i \in A\}$ contient une boule ouverte de centre 0 de rayon strictement positif.

Exercice 3. *Déterminer tous les endomorphismes de $(\mathbf{R},+)$ mesurables.*

Correction de l'exercice 1. On montre pour cela un résultat préliminaire : pour tout borélien B, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F_ε, un ouvert U_ε vérifiant

$$\lambda(U_\varepsilon \backslash F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad F_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$$

On note $\mathcal{A}$ la collection d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ vérifiant (*) pour tout $\varepsilon > 0$ et montre que c'est une tribu contenant les fermés de $\mathbf{R}^d$.

D'abord, toute partie A fermée appartient à $\mathcal{A}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$; on pose d'abord $F_\varepsilon = A$. Ensuite, pour $\delta > 0$, on pose $V_\delta(A) = \bigcup_{x\in A} B(x,\delta)$. Posons pour $n \geqslant 1$, $U_n = V_{\frac{1}{n}}(A)$, ouvert comme union d'ouverts. La suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, et donc par continuité à droite de la mesure λ

$$\lim \lambda(U_n) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} U_n\right)$$

or $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} U_n = A$. En effet si $x \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} U_n$, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $y_n \in A$ tel que $\|x - y_n\| \leqslant \frac{1}{n}$. La suite (y_n) est bornée, donc on peut en extraire une suite $(y_{\varphi(n)})$ convergente de limite $y \in A$ car A est fermé. Par passage à la limite $\|x - y\| \leqslant 0$ et alors $x = y \in A$; l'autre inclusion est triviale. Ainsi, il existe $n_0 \geqslant 1$ vérifiant $0 \leqslant \lambda(U_{n_0}) - \lambda(A) \leqslant \varepsilon$ et on pose alors $U_\varepsilon = U_{n_0}$ qui convient. Ainsi $\mathcal{A}$ contient tous les fermés, donc en particulier $\mathbf{R}^d$, mais $\mathcal{A}$ est également stable par passage au complémentaire. On montre enfin qu'elle stable par union dénombrable. Soient $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}^*}$, $\varepsilon > 0$. Il existe pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ des F_n, U_n vérifiant (*) pour A_n et pour $\varepsilon_n = 2^{-n}\varepsilon$. Posons $U_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} U_n$ (on constate que c'est un ouvert comme union d'ouverts), $G_k = \bigcup_{i=1}^k F_i$ (fermé comme union finie de fermés) pour tout $k \geqslant 1$. $(G_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments de boréliens, de limite $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} F_n$, ainsi par continuité à gauche $\lambda(G_k)$ tend vers $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} F_n)$ à mesure que $k \to +\infty$. Mais $\lambda(U_\varepsilon \backslash \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} F_n) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}(U_n \backslash F_n)) \leqslant \varepsilon$ et $\lambda(U_\varepsilon \backslash G_k)$ tend vers $\lambda(U_\varepsilon \backslash \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} F_n)$ à mesure que $k \to +\infty$, donc est plus petit que ε à partir d'un certain k_0. On pose finalement $F_\varepsilon = F_{k_0}$ et on constate

$$\lambda(U_\varepsilon \backslash F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad F_\varepsilon \subseteq \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} A_n \subseteq U_\varepsilon$$

Ainsi, pour un certain borélien B, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U_ε, F_ε vérifiant (*), et alors, il existe un certain $M > 0$ tel que le compact $K_\varepsilon = F_\varepsilon \cap B(0, M)$ vérifie $\lambda(B\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, et alors
$$\varepsilon + \lambda(K_\varepsilon) \geqslant \lambda(U_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) + \lambda(K_\varepsilon) = \lambda(U_\varepsilon) \geqslant \lambda(B)$$
et
$$\lambda(U_\varepsilon) = \lambda(U_\varepsilon \cap B) + \lambda(U_\varepsilon \cap B^c) \leqslant \lambda(A) + \lambda(U_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \leqslant \lambda(B) + \varepsilon$$
ce qui montre, ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lambda(B) = \sup_{\substack{K \subseteq B \\ K \text{ compact}}} \lambda(K) = \inf_{\substack{B \subseteq U \\ U \text{ ouvert}}} \lambda(U)$$
ce qui conclut.

Correction de l'exercice 2. D'après l'exercice 1, λ est régulière, et alors il existe K un compact inclus dans A de mesure plus grande que $\lambda(A) - \frac{\lambda(A)}{4} > 0$ car $\lambda(A) > 0$. Toujours par régularité de λ, il existe un ouvert U contenant A et vérifiant
$$\lambda(U) < \lambda(A) + \frac{\lambda(A)}{2} \leqslant 2\lambda(K)$$
Par transitivité de $\subseteq$, $K \subseteq U$, et alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K + h \subseteq U$ dès que $\|h\| < \varepsilon$. En effet, tout élément $x \in K$ est dans U ouvert, donc il existe un $\varepsilon_x > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_x) \subseteq U$. Puis
$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right)$$
et d'après Borel-Lebesuge, on extrait un recouverement fini de K
$$K \subseteq \bigcup_k B\left(x_{j_k}, \frac{\varepsilon_{x_{j_k}}}{2}\right)$$
ainsi, lorsque $x \in K + h$, $x = x' + h$ avec $x' \in K$ donc avec $x' \in B\left(x_{j_k}, \frac{\varepsilon_{x_{j_k}}}{2}\right)$ pour un certain k. D'où $\|x - x_{j_k}\| \leqslant \|x' - x_{j_k}\| + \|h\| \leqslant \frac{\varepsilon_{x_{j_k}}}{2} + \|h\|$, et alors $x \in U$ dès que $\|h\| \leqslant \frac{\min \varepsilon_{x_{j_k}}}{2}$. On a de plus que $K \cap (K + h) \neq \emptyset$ pour tout h de norme assez petite, sinon $2\lambda(K) = \lambda(K \cup (K + h)) \leqslant \lambda(U)$, ce qui conclut.

Correction de l'exercice 3. On montre qu'il s'agit exactement des applications linéaires. Les applications linéaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ sont continues donc mesurables et sont bien évidemment des endomorphismes de $(\mathbf{R}, +)$. Soit f un endomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$. Si f n'est pas linéaire, nécessairement il existe $x^* \in \mathbf{R}$ tel que $f(x^*) \neq x^* f(1)$. En fait, on vérifie que pour tout rationnel $q \in \mathbf{Q}$, pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $f(qx) = qf(x)$. Dans ce cas, le graphe de f, qui est l'ensemble
$$G = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbf{R}\}$$
est dense dans $\mathbf{R}^2$. En effet, si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, et si $\varepsilon > 0$, on montre qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - \alpha| < \varepsilon$ et $|f(x) - \beta| < \varepsilon$ (on travaille avec la norme infinie dans $\mathbf{R}^2$). On pose $\delta = \beta - \alpha f(1)$, $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Comme $f(x^*) - x^* f(1) \neq 0$, on peut choisir $q_0 \in \mathbf{Q}$ tel que $|f(q_0 x^*) - q_0 x^* f(1) - \delta| < \varepsilon'$ car $f(qx^*) - qx^* f(1) = q(f(x^*) - x^* f(1))$ pour tout $q \in \mathbf{Q}$. Ce q_0 étant choisi, on peut choisir $q_1 \in \mathbf{Q}$ tel que $|f(1)||q_0 x^* + q_1 - \alpha| < \varepsilon'$ et $|q_0 x^* + q_1 - \alpha| < \varepsilon$, et on aura toujours $|f(q_0 x^* + q_1) - (q_0 x^* + q_1) f(1) - \delta| < \varepsilon'$ car $f(q_0 x^* + q_1) - (q_0 x^* + q_1) f(1) = f(q_0 x^*) - q_0 x^* f(1)$.

Ainsi, on obtient

$$|f(q_0x^* + q_1) - \beta| \leqslant |f(q_0x^* + q_1) - (q_0x^* + q_1)f(1) - \delta| + |f(1)||q_0x^* + q_1 - \alpha| < \varepsilon$$

ce qui conclut à la densité de G dans $\mathbf{R}^2$. Si de plus f est mesurable, f est bornée au voisinage de 0. En effet, il existe $M > 0$ tel que $A := f^{-1}(B(0, M))$ est non négligeable, car sinon $\lambda(\mathbf{R}) = 0$ par continuité à gauche. D'après l'exercice 2, $A - A$ contient un intervalle centre en 0, notons-le I. Donc pour tout $x \in I$, il existe $a_1, a_2 \in A$, $x = a_1 - a_2$, d'où $|f(x)| = |f(a_1) - f(a_2)| \leqslant 2M$. Ainsi, si f est mesurable, le graphe de f ne peut être dense dans $\mathbf{R}^2$, car f est bornée au voisinage de 0, et alors f est nécessairement linéaire.