

# LEÇON 209 - APPROXIMATION PAR DES FONCTIONS RÉGULIÈRES ETC.

## I Approximation polynomiale

### I.1 Développements limités, formules de Taylor ([Rom19])

On fixe  $I$  un intervalle réel et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

**Définition 1 (Développement limité)** : On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $p$  en  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$  s'il existe un polynôme  $T$  de degré  $p$  tel que :

$$\forall x \in I, f(x_0 + h) = T(h) + o(h^p)$$

**Proposition 2** : Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $p$  en  $x_0$ , celui-ci est unique.

**Exemple 3** : Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre  $p$ . La fonction caractéristique de  $X$  admet un développement limité d'ordre  $p$  en 0 donné par :

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^p i^k \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k + o(t^p)$$

**Théorème 4 (Taylor-Young)** : Soit  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ . Si  $f$  est  $p$  fois dérivable en  $x_0$ , elle admet un développement limité d'ordre  $p$  en  $x_0$  donné par :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^p)$$

**Contre-exemple 5** :  $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x^3) \mathbb{1}_{x \neq 0}$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0 donné par  $f(x) = o(x^2)$  mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

**Théorème 6 (Taylor reste intégral)** : Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $p+1$ -fois différentiable sur  $U$ . Pour tout  $x_0 \in U$  et  $h \in \mathbb{R}^d$  tel que  $[x_0; x_0 + h] \subset U$ , on a :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} d^k f(x_0) \cdot (h, \dots, h) + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^p}{p!} d^{p+1} f(x_0 + \theta h) \cdot (h, \dots, h) d\theta$$

([Amr19])

**Application 7 (Lemme de Morse)** : Soit  $U$  un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^d$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction de classe  $C^3$  telle que  $f(0) = 0$  et  $df(0) = 0$ . On suppose que  $d^2f$  induit une forme quadratique non dégénérée de signature  $(p, d-p)$ . Il existe un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $U$  et  $u : u \rightarrow \mathbb{R}^d$  un  $C^1$ -difféomorphisme sur son image tel que  $u(0) = 0$  et :

$$\forall x \in V, f(x) = u_1^2(x) + \dots + u_p^2(x) - u_{p+1}^2(x) - \dots - u_d^2(x)$$

([Rou15])

### I.2 Théorèmes de densité

**Théorème 8 (Weierstraß)** : Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$ . L'espace des fonctions polynomiales réelles est dense dans  $C^0(K)$  pour la topologie de la norme uniforme.

**Contre-exemple 9** :

1. L'exponentielle n'est pas limite uniforme de fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}$  tout entier.
2. L'application  $z \mapsto \bar{z}$  n'est pas limite uniforme de fonctions polynomiales sur le disque unité de  $\mathbb{C}$ . ([QQ17])

**Application 10** : Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles à support compact. Si  $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X$  et  $Y$  sont égales en loi. ([QQ17])

**Application 11 (Théorème taubérien fort)** : Soit  $(a_n)$  une suite complexe. On suppose que pour tout  $0 \leq x < 1$ , la série  $\sum a_n x^n$  est convergente et que  $\sum a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1-} l \in \mathbb{C}$ . Si  $|a_n| = O(1/n)$ , la série des  $(a_n)$  est convergente de limite  $l$ . ([Gou])

**Proposition 12** : L'espace de Schwartz  $S(\mathbb{R})$  des fonctions  $C^\infty$  dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide est dense dans l'espace  $C_0^0$  des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. ([QZ])

**Corollaire 13 (Lévy)** : Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une autre variable aléatoire réelle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ .
2. La fonction caractéristique de  $X_n$  converge simplement vers celle de  $X$ .

**Théorème 14 (Central Limite)** : Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires

réelles centrées et réduites. La suite

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

**Application 15 :** On considère  $(X_n)$  une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $\theta \in ]0, 1[$  inconnu. Pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , l'intervalle :

$$\left[ \overline{X_n} + \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1 - \overline{X_n})}{n}} q(\alpha/2), \overline{X_n} - \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1 - \overline{X_n})}{n}} q(\alpha/2) \right]$$

avec  $q$  la fonction de quantile de la loi normale centrée réduite et  $\overline{X_n} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  est un intervalle de confiance asymptotique pour  $\theta$  de niveau  $1 - \alpha$ . ([CR])

## II Convolution et régularisation ([Amr])

### II.1 Produit de convolution

On notera pour  $n \in \mathbb{Z}$   $e_n : x \mapsto e^{inx}$  les éléments du système trigonométrique.

**Définition 16 (Convolution) :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles mesurables [resp.  $2\pi$ -périodiques]. On définit, lorsque ça a du sens, leur « produit de convolution » [resp. « produit de convolution  $2\pi$ -périodique »] par la formule :

$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy$$

[resp.

$$f \star_{2\pi} g : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) dy$$

]

**Proposition 17 :** Soit  $f, g$  des fonctions mesurables réelles. Le produit de convolution  $f \star g$  est bien défini dans les cas suivants :

1.  $f$  et  $g$  sont  $L^1$ . Dans ce cas,  $f \star g$  est  $L^1$ .
2.  $f$  est  $L^1$  et  $g$  est  $L^p$ . Dans ce cas,  $f \star g$  est  $L^p$ .
3.  $f$  est  $L^p$  et  $g$  est  $L^q$  avec  $1/p + 1/q = 1$ . Dans ce cas,  $f \star g$  est  $L^\infty$ .

**Exemple 18 :** On note  $D_N := \sum_{k=-N}^N e_k$  le  $N$ -ième noyau de Dirichlet. Pour  $f$  une fonction  $L^1$  et  $2\pi$ -périodique, on trouve :

$$2\pi(f \star_{2\pi} D_N) = \sum_{k=-N}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} e^{-ikx} dx \right) e_k$$

### II.2 Approximation de l'unité

**Définition 19 (Approximation de l'unité) :** Une suite  $(\Phi_n)$  de fonctions mesurables réelles est dite « approximation de l'unité » si :

1.  $\Phi_n \geq 0$
2.  $\int \Phi_n = 1$
3.  $\forall \varepsilon > 0, \int_{|x| \geq \varepsilon} \Phi_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Si de plus  $\Phi_n$  est  $C^\infty$  à support inclus dans  $[-1/n, 1/n]$ , on parle de « suite régularisante ».

**Exemple 20 :**

1. Le noyau de Gauss est une approximation de l'unité :

$$\gamma_n : x \mapsto \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n^2}\right)$$

2. La suite suivante est une suite régularisante pour une certaine valeur de  $C > 0$  :

$$\Phi_n : x \mapsto C \exp\left(-\frac{1}{1 - |x|^2}\right) \mathbb{1}_{|x| < 1}$$

**Proposition 21 :** Soit  $\Phi$  une fonction  $C^\infty$  à support compact. Pour  $1 \leq p < +\infty$  et  $f \in L^p$  ou  $f$  continue, la fonction  $f \star \Phi$  est de classe  $C^\infty$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(f \star \Phi)^{(k)} = f \star (\Phi^{(k)})$ .

**Théorème 22 :** Soit  $\Phi_n$  et approximation de l'unité et  $1 \leq p < +\infty$ . Si  $f$  est une fonction  $L^p$  [resp. une fonction continue de limites nulles à l'infini],  $f \star \Phi_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p$  [resp. dans  $L^\infty$ ].

**Application 23 (Inversion de Fourier) :** Soit  $f$  une fonction  $L^1$  dont la transformée de Fourier est encore  $L^1$ . Alors  $f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}[f]$  avec  $\check{f} : x \mapsto f(-x)$ .

**Lemme 24 :** Soit  $H$  une partie de  $L^p$ . Alors  $H$  est relativement compacte si, et seulement si, elle est précompacte (i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $H$  peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ ). ([Gou])

**Théorème 25 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)** : Soit  $H \subset L^p$ . On suppose :

1.  $H$  bornée dans  $L^p$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall |a| \leq \eta, \forall f \in H, \|\tau_a f - f\|_p \leq \varepsilon$  (hypothèse d'équicontinuité- $L^p$ )
3.  $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall f \in H, \int_{|x|>R} |f(x)|^p dx \leq \varepsilon$  (hypothèse d'équiténsion)

Alors  $H$  est relativement compacte dans  $L^p$ . ([HL09])

### III Approximation par des polynômes trigonométriques ([Amr])

On désigne toujours par  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  le système trigonométrique. On note  $L_{2\pi}^p$  l'ensemble des fonctions  $2\pi$ -périodiques dont la restriction à  $[-\pi, \pi]$  est  $L^p$ .

#### III.1 Coefficients de Fourier, noyaux trigonométriques

**Définition 26 (Coefficients de Fourier)** : Soit  $f \in L_{2\pi}^1$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on appelle  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$  la quantité

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

**Définition 27 (Noyaux trigonométriques)** : Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

1. On appelle  $N$ -ième noyau de Dirichlet la fonction  $D_N := \sum_{n=-N}^N e_n$ .
2. On appelle  $N$ -ième noyau de Féjér, pour  $N \neq 0$ , la fonction  $K_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$ .

**Définition 28** : Pour  $f \in L_{2\pi}^1$ , on note  $S_N(f)$  la fonction  $\sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$ , dite «  $N$ -ième somme partielle de Fourier de  $f$  ».

**Remarque 29** :  $S_N(f) = f \star_{2\pi} D_N$ . De plus,  $f \star_{2\pi} K_N$  est la  $N$ -ième moyenne de Cesàro des  $(S_n(f))$ .

#### III.2 Théorème de Féjér et conséquences

**Théorème 30 (Féjér)** : La suite des noyaux de Féjér est une approximation de l'unité pour la convolution  $2\pi$ -périodique. On en déduit notamment que pour  $1 \leq p < +\infty$ ,  $f \star_{2\pi} K_N$  converge dans  $L_{2\pi}^p$  vers  $f$ . De plus, si  $f \in C_{2\pi}^0$ ,  $f \star_{2\pi} K_N$  converge uniformément vers  $f$ .

**Corollaire 31** : Soit  $f$  une fonction continue et  $2\pi$ -périodique et soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $S_N(f)(x)$  converge, sa limite est  $f(x)$ .

**Application 32** : Le système trigonométrique est une base hilbertienne de  $L_{2\pi}^2$ .

**Application 33 (Weierstraß explicite)** : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[-1, 1]$ . La suite de fonctions polynomiales

$$P_N : x \mapsto c_0(f) + 2 \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) c_n(f) \left[ \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k \right]$$

converge uniformément vers  $f$ .

### III.3 Convergence de la série de Fourier

**Théorème 34** : Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $C^p$ ,  $p \leq 1$ . Alors  $f$  est limite uniforme de sa série de Fourier, et  $|c_n(f)| = o(1/|n|^p)$ .

**Application 35 (Laurent)** : Soient  $0 < r < R$  et  $f$  une fonction holomorphe sur la couronne ouverte  $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ . Il existe une unique suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$  sur cette couronne. Par ailleurs, cette série converge uniformément vers  $f$  sur tout compact inclus dans cette couronne. ([QQ17])

**Application 36 (Formule sommatoire de Poisson)** : Soit  $f \in S(\mathbb{R})$ . On a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](x+n)$$

([QZ])

### Références

- [Amr] Mohammed El AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses.
- [Amr19] Mohammed El AMRANI. *Calcul différentiel - Une approche progressive et pratique enrichie de 215 exercices corrigés*. Ellipses, 2019. ISBN : 9782340033009.
- [CR] Marie-Line CHABANOL et Jean-Jacques RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. Ellipses. ISBN : 9782340-013063.
- [Gou] Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses.
- [HL09] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE. *Elements d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009. ISBN : 978-2-10-053594-1.
- [QQ17] Hervé QUEFFÉLEC et Martine QUEFFÉLEC. *Analyse complexe*. Calvage et Mountet, 2017.
- [QZ] Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD.
- [Rom19] Jean-Etienne ROMBALDI. *Elements d'analyse réelle*. EDP Sciences, 2019. ISBN : 978-2-7598-2339-0.
- [Rou15] François ROUVIÈRE. *Petit guide du calcul différentiel*. Cassini, 2015.