

Rapport du jury

Le matériel théorique en accord avec le programme doit être présenté, accompagné d'illustrations pertinentes. Il faut pouvoir dégager l'intérêt des notions introduites avec des exemples d'actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégagant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de Burnside. Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de S_n sur $\{1, \dots, n\}$, action par translation ou par conjugaison, représentations de groupes, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un polygone dans le plan ou d'un solide ou d'un polygone régulier dans l'espace). Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $PGL_2(K)$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de Sylow ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

Références

- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Cours d'Algèbre - Daniel Perrin](#)
- [Modules sur les anneaux commutatifs - Diaz Toca, Lombardi et Quitté](#)
- [P. Caldero - Carnet de voyage en Analytan](#)

Développements

- [Probas sur \$GL_2\(\mathbb{F}_q\)\$](#)

- [Automorphismes de \$S_n\$](#)

Méta-plan

1. Langage des actions de groupes
 1. Actions de groupes
 2. Orbites, stabilisateurs
2. Actions de groupes et combinatoires
 1. Etude combinatoire des p -groupes
 2. Formule de Burnside
3. Actions de groupes de matrices ; problèmes de classification
 1. Action par similitude
 2. Action par équivalence (dans les anneaux)
 3. Action par congruence

Plan détaillé

I - Langage des actions de groupes [Perrin]

1 - Actions de groupes

1. Définition : action de groupe
2. Exemple : action de S_n sur $[1, n]$, sur $K[X_1, \dots, X_n]$.
3. Exemple : action de G sur un sous-groupe H par translation, par conjugaison.
4. Exemple : Action de $K < G$ sur G/H
5. Définition : Soit $\rho : G \rightarrow S(X)$. On dit que l'action est :
 1. fidèle lorsque ρ est injective.
 2. Transitive lorsque $\forall (x, y) \in X, \exists g \in G : \rho(g) \cdot x = y$
 3. Libre lorsque pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, $\rho(g)$ est sans point fixe.
6. Exemples :
 1. l'action de S_n sur $[1, n]$ est transitive et fidèle, mais pas libre.
 2. Un espace affine est la donnée d'un ensemble non-vide $\mathcal{E}$ et d'une action libre et transitive d'un espace vectoriel E sur $\mathcal{E}$.

2 - Orbites, stabilisateurs

1. Définition : G -orbite
2. Exemple : soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les supports des cycles apparaissant dans la décomposition de σ sont exactement les orbites de $[1, n]$ sous l'action de $\langle \sigma \rangle$.
3. Remarque : l'action est transitive ssi il y a une seule orbite
4. Définition : le stabilisateur de $x \in X$ est le sous-ensemble de G composé des éléments tels que $g \cdot x = x$. C'est un sous-groupe de G .
5. Exemples :
 1. le stabilisateur de k sous l'action de $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations dont k est un point fixe.
 2. On assimile $\mathbb{C}$ au plan affine. Le stabilisateur de l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité sous l'action naturelle du groupe d'isométries du plan est le groupe diédral à $2n$ éléments.
6. Théorème : on a une bijection $Orb(x) \cong G/Stab_G(x)$.
7. Application : dénombrement de $\mathfrak{S}_n$
8. Définition : centralisateur
9. Lemme : si $\phi \in Aut(G)$, on a un iso $C(g) \cong C(\phi(g))$.
10. Application : automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ (DVT 1)

II - Actions de groupes et combinatoires

1 - Etude combinatoire des p -groupes [Perrin]

1. Théorème : équation aux classes
2. Corollaire : $|G| = |Z(G)| + \sum \dots$
3. Définition : p -groupe
4. Application : le centre d'un p -groupe n'est pas trivial
5. Corollaire : si G est un groupe d'ordre p^n , pour tout $r \leq n$, G contient un sous-groupe d'ordre p^r .
6. Définition (p -Sylow)
7. Théorèmes (Sylow)
8. Application : un groupe d'ordre machin truc n'est pas simple

2 - Formule de Burnside [Carnet de voyage en analystan]

1. Théorème : formule de Burnside

2. Application : espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire.
3. Corollaire : Soit G un groupe fini. La probabilité que deux éléments de G commutent est $\frac{k}{|G|^2}$, où k est le nombre d'orbites par conjugaison (DVT 2)
4. Application : proba que deux matrices commutent (DVT 2)

III - Actions des groupes de matrices. Problèmes de classification

1 - Action par similitude [Rombaldi]

1. Définition : action par similitude
2. Proposition : deux matrices sont semblables ssi
3. Proposition : le rang, le déterminant, le polynôme cara, le polynôme mini sont des invariants de similitude, mais aucune combinaison de ces invariants ne caractérise les orbites
4. Contre-exemple ultime : utiliser des formes de Jordan pour créer deux matrices pas semblables mais qui ont même trace, même rang, même déterminant, même polynôme caractéristique et même polynôme minimal
5. Application : la diagonalisabilité et la trigonalisabilité sont des propriétés des orbites
6. Théorème : réduction de Frobenius
7. Application : critère de similitude par extension de corps.

2 - Action par équivalence [Diaz-Toca, Lombardi et Quitté]

1. Définition : action par équivalence (dans les anneaux)
2. Théorème (réduction de Smith)
3. Application 1 : résolution d'un système linéaire à coefficients entiers.
4. Application 2 : deux matrices à coefficients dans K sont semblables ssi $XI_n - A$ sont équivalentes dans $K[X]$

3 - Action par congruence [Rombaldi]

1. Définition : action par congruence
2. Proposition : deux matrices sont congruentes ssi elles représentent la même forme quadratique dans des bases différentes

3. Théorème (Gauss) : toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.
4. Corollaire (Sylvester)
5. Application : soit $\mathcal{C}$ une conique non-dégénérée et non vide du plan affine. Si $\mathcal{C}$ est à centre, il existe un unique couple $0 < a \leq b$ et $\epsilon \in \{1, -1\}$ tels que dans un certain repère orthonormé affine, $\mathcal{C}$ ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \epsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$$