

Rapport du jury

Les notions élémentaires concernant les nombres complexes de module 1 (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.) doivent être présentés, avant d'aborder l'aspect "groupe" de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbb{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il est souhaitable de présenter des applications en géométrie plane, par exemple la constructibilité des polygones réguliers. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, et éventuellement les représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbb{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis ou encore aux transformées de Fourier discrètes et rapides. Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le cœur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

Références

- [Cours d'Algèbre - Daniel Perrin](#)
- [Algèbre - le Grand combat - Berhuy](#)
- [Théorie de Galois - Escofier](#)
- [P. Caldero - Carnet de voyage en Algérie](#)
- [L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann et Pecatte](#)
- [Analyse complexe - Queffélec-Queffélec](#)

Développements

- [Cyclotomie](#) (sur $\mathbb{Q}$)
- [Théorème de Kronecker](#)

Méta-plan

1. Argument et exponentielle complexe
2. L'ensemble $\mathbb{U}$.
 1. Structure de groupe
 2. Aspects topologiques de $\mathbb{U}$
3. Racines de l'unité
 1. Racines de l'unité
 2. Cyclotomie
4. Nombres complexes et géométrie
 1. Transformations affines du plan
 2. Problèmes de constructibilité

Plan détaillé

1. Définition : on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

I - Argument et exponentielle complexe [Quéffelec]

1. Définition (exponentielle complexe, cosinus, sinus) : on définit la fonction exponentielle complexe comme l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = iy(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On définit les fonctions cosinus et sinus réelles comme les parties réelles et imaginaires de $e^{i\theta}$.

2. Proposition / définition : soit z un complexe non nul. Il existe un réel θ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$. Un tel réel θ est appelé argument de z . On appelle argument principal de z son unique argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.
3. Exemples : i a pour argument principal $\pi/2$. Le complexe $j := \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ a pour argument principal $\frac{2\pi}{3}$.
4. Remarque : un complexe a une infinité d'arguments possibles.
5. Théorème (exponentielle complexe) : la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Lorsque z est un imaginaire pur ou un réel, cette somme vaut e^z , fournissant ainsi un prolongement entier de l'exponentielle.
6. Théorème (propriétés de l'exponentielle complexe)
 1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

2. $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est C^∞ , 2π -périodique et à valeurs dans $\mathbb{U}$ et surjective.
3. $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$.
7. Application 1 :(formules de duplication) :
 $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$ etc.
8. Application 2 (polynômes de Tchebyshev) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

II - L'ensemble $\mathbb{U}$

1 - Structure de groupe [Queffélec]

1. Proposition : $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$.
2. Proposition : la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes continue et surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Son noyau est par définition $2\pi\mathbb{Z}$.
3. Corollaire : $\mathbb{U} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en tant que groupe.
4. Théorème : les sous-groupes de $\mathbb{U}$ sont finis ou denses dans $\mathbb{U}$.
5. Application : la suite géométrique $(e^{in\theta})$ est périodique si $\theta/2\pi \in \mathbb{Q}$ et d'image dense dans $\mathbb{U}$ sinon.

2 - Aspects topologiques de $\mathbb{U}$ [Queffélec]

1. Proposition : $\mathbb{U}$ est l'unique sous-groupe compact infini de $\mathbb{C}^\times$. De plus, tout sous-groupe compact de $\mathbb{C}^\times$ est inclus dans $\mathbb{U}$.
2. Théorème : la fonction $p : \theta \mapsto e^{i\theta}$ est un revêtement de $\mathbb{U}$, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe V_z un voisinage de z dans $\mathbb{U}$ tel que $p^{-1}(V_z)$ s'écrive comme une union disjointe de parties de $\mathbb{R}$ homéomorphes à V_z .
3. Remarque : le voisinage V_z peut toujours être pris égale à $\mathbb{U} \setminus \{-z\}$ qui est homéomorphe à n'importe quel intervalle.
4. Corollaire (théorème du relèvement de l'angle) : soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{U}$. Il existe une unique fonction $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $-\pi < \theta(0) \leq \pi$ et $\gamma(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout t .
5. Application : soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet C^1 par morceaux. La fonction

$$Ind_\gamma : z \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

est à valeurs entières.

III - Racines de l'unité

1 - Elements d'ordre fini de $\mathbb{U}$. [Algèbrie], [Isenmann et Pecatte], [Rombaldi algèbre / Perrin]

1. Définition : on note μ_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité de $\mathbb{U}$ et $\mu_n^* \subset \mu_n$ l'ensemble des éléments d'ordre n de $\mathbb{U}$.
2. Lemme : μ_n est un groupe cyclique d'ordre n dont on a une description explicite : $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\}$. μ_n^* est l'ensemble de ses générateurs.
3. Théorème : tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à μ_n .
4. Application : Soit G un groupe cyclique d'ordre n . Pour tout $d \mid n$, G admet un unique sous-groupe d'ordre d .
5. Proposition : soit M une matrice carrée à coefficients complexes d'ordre fini dans $GL_n(\mathbb{C})$. M est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont des racines n -ièmes de l'unité.
6. Application : On note $C(X_1, \dots, X_n)$ la matrice circulante universelle. Il existe $F \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $FC(X_1, \dots, X_n)F^{-1}$ est diagonale de coefficients diagonaux $P(X_1, \dots, X_n)(\omega)$, avec ω une racine primitive n -ième de l'unité et $P(X_1, \dots, X_n) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} X_{i+1}T^i$.
7. Théorème (Kronecker) : soit P un polynôme à coefficients entiers dont toutes les racines sont de module au plus 1. Alors toutes les racines non nulles de P sont des racines de l'unité. (DVT 1)
8. Application : Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Alors $|G| \leq |GL_n(\mathbb{F}_3)|$. (DVT 1)

2 - Cyclotomie [Perrin], [Escofier]

1. Définition (polynôme cyclotomique) : On note Φ_n le polynôme dont les racines sont exactement les éléments de μ_n^* .
2. Exemples :
 1. $\Phi_8 = X^4 + 1$.
 2. Si p est un nombre premier, $\Phi_p = X^{p-1} + \dots + 1$.
3. Lemme : Les polynômes cyclotomiques satisfont la relation de récurrence forte :

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$$

(DVT 2)

4. Corollaire : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$. (DVT 2)
5. Théorème : Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{Z}$, ce quelque soit n . (DVT 2)
6. Application : Le polynôme Φ_8 est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais dont le projeté dans tout corps fini est réductible.
7. Proposition : l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q}$ est de degré $\varphi(n)$, avec φ l'indicatrice d'Euler.

IV - Nombres complexes et géométrie

1 - Affixes complexes et transformations affines du plan [De mémoire]

1. Définition / Proposition : considérons $\mathcal{P}$ le plan affine muni d'un repère orthonormé. L'application qui à un point M de coordonnées (x, y) associé le complexe $z := x + iy$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}$. Le complexe z est appelé affixe complexe de M .
2. Théorème : on a un homéomorphisme de groupes $SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{U}$ donné par $R_\theta \mapsto e^{i\theta}$.
3. Application : soit A un point du plan d'affixe z_A . La rotation affine de centre A et d'angle θ s'exprime, en terme d'affixes complexes, par $z \mapsto e^{i\theta}(z - z_A) + z_A$.
4. Théorème : Notons $Iso^+(\mathcal{P})$ le groupe des isométries affines positives du plan. On a l'isomorphisme de groupes :

$$Iso^+(\mathcal{P}) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{U}$$

(avec suffisamment d'assurance, on peut présenter un diagramme commutatif à lignes exactes mais j'ai peur que ça passe pour de la frime gratuite)

2 - Constructibilité à la règle et au compas [Escofier, Berhuy]

1. Définition : soit E un ensemble de points du plan. On définit par récurrence les ensembles $E_0 = E$ et E_{n+1} est l'ensemble des points qui sont intersections de droites passant par deux points de E_n et de cercles de centre un point de E_n passant par un autre point de E_n . Un point est dit constructible à la règle et au compas à partir de E s'il appartient à l'union des E_n .
2. Définition : un nombre complexe z est dit constructible à la règle et au compas s'il est l'affixe complexe d'un point constructible à partir des points d'affixe 0 et 1.

3. Remarque : soit $z \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. z est constructible
 2. $\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont constructibles
 3. $|z|$ est constructible et le complexe $e^{i\theta}$ est constructible, où θ est un argument de z .
4. Exemples : $\mathbb{Q}[i]$ est un ensemble de points constructibles. $\sqrt{2}$ est constructible.
5. Théorème : L'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{C}$ stable par extraction de racine carrée.
6. Théorème (Wantzel) : un complexe z est constructible si, et seulement si, il existe une tour d'extension $L_n/L_{n-1}/L_0 = \mathbb{Q}$ avec $z \in L_n$ est L_{i+1}/L_i est de degré 2.
7. Définition (polygone régulier) : on appelle polygone régulier à n sommets du plan tout ensemble de points qui est isométrique à l'ensemble des points d'affixe μ_n .
8. Théorème (Gauss-Wantzel, admis) : le polygone régulier à n sommets est constructible si, et seulement si, $n = 2^s p_1 \times \cdots \times p_k$ avec s un entier et les (p_i) des nombres premiers de Fermat distincts.
9. Exemples :
 1. le pentagone régulier est constructible :)
 2. L'heptagone régulier ne l'est pas :(