

Rapport du jury

Les premières définitions et propriétés générales du groupe linéaire doivent être présentées : familles de générateurs, liens avec le pivot de Gauss, sous-groupes remarquables. Il est important de savoir faire correspondre certains sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(K)$ et faire le lien entre signature et déterminant. Il est souhaitable de dégager des propriétés particulières selon le corps de base, en particulier sa cardinalité lorsque le corps K est fini et les propriétés topologiques de ce groupe lorsque le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter le fait que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $GL_n(\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $GL_{n,p}$.

Références

- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Cours d'Algèbre - Daniel Perrin](#)
- [L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann et Pecatte](#)
- [P. Caldero - Carnet de voyage en Analytan](#)

Développements

- [Théorème de Kakutani](#)
- [Probas sur \$GL_2\(\mathbb{F}_q\)\$](#)

Méta-plan

1. Propriétés de groupe de $GL(E)$
 1. Description des éléments de $GL(E)$
 2. Groupe spécial linéaire. Système de générateurs.
2. Actions du groupe linéaire
 1. Action par équivalence

- 2. Action de similitude
- 3. Action de congruence
- 3. Propriétés dépendant du corps de base
 - 1. Groupe linéaire sur un corps fini
 - 2. Aspects topologiques dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Plan détaillé

I - Le groupe linéaire [Rombaldi]

On fixe un corps K dans toute cette partie et un K -espace vectoriel E de dimension d finie.

1 - Automorphismes linéaires

1. Définition : on appelle groupe linéaire de E l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes K -linéaires de E . On note $GL_d(K)$ l'ensemble des matrices de taille $d \times d$ inversibles à coefficients dans K . Ce sont des groupes pour les lois usuelles.
2. Remarque : le choix d'une base sur E induit un isomorphisme de groupes $GL(E) \cong GL_d(K)$.
3. Proposition : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. $u \in GL(E)$
 2. $\text{Ker}(u) = 0$
 3. $\text{Im}(u) = E$
 4. $\det(u) \neq 0$.
4. Exemples :
 1. Les rotations du plan sont dans le groupe linéaire.
 2. La seule projection à appartenir au groupe linéaire est l'identité.
5. Théorème : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E . u est inversible si, et seulement si, $u(\mathcal{B})$ est une base de E .
6. Application : soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Celles-ci sont linéairement indépendantes si, et seulement si, il existe $(x_1, \dots, x_n)$ des réels tels que la matrice $(f_i(x_j))$ soit inversible.

2 - Générateurs. Groupes spécial linéaire.

1. Proposition / Proposition (groupe spécial linéaire) : le déterminant est un morphisme de groupes de $GL(E)$ dans $K^\times$. On appelle groupe spécial linéaire son noyau. Il donne naissance à une suite exacte scindée à droite :

$$1 \rightarrow SL(E) \rightarrow GL(E) \rightarrow K^\times \rightarrow 1$$

On va maintenant étudier les générateurs de SL (motivé par cette suite exacte). Pour cela, on adoptera plutôt un point de vue matriciel.

2. Définition (transvection) : on appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $I_d + \lambda E_{i,j}$, $\lambda \neq 0$ et $i \neq j$. On appelle transvection de E tout endomorphisme dont la matrice dans une certaine base est une matrice de transvection.
3. Définition (dilatation) : on appelle matrice de dilatation toute matrice diagonale inversible dont tous les coefficients diagonaux sauf un valent 1. On appelle dilatation de E tout endomorphisme dont la matrice dans une certaine base est une matrice de dilatation.
4. Remarque : les transvection et les dilatations sont des automorphismes liés aux opérations élémentaires de l'algorithme du pivot de Gauss. En effet, la multiplication à droite (resp. à gauche) par $I_d + \lambda E_{i,j}$ correspond à la transformation élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. sur les colonnes). Les dilatations correspondent aux opérations de dilatation.
5. Application : utilisation du pivot de Gauss pour calculer un déterminant.
6. Théorème : les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$. Les transvections engendrent $SL(E)$.
7. Corollaire : les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$.
8. Remarque : ce théorème signifie de façon abstraite que si deux matrices sont équivalentes, on peut passer de l'une à l'autre simplement à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, et justifie donc l'efficacité de l'algorithme du pivot de Gauss.
9. Application : si $n \geq 3$, le groupe dérivé de $GL(E)$ est $SL(E)$.

II - Quelques actions du groupe linéaire [Rombaldi]

1 - Action par équivalence

1. Définition : l'application $GL_n(K) \times GL_p(K) \times M_{n,p}(K) \times M_{n,p}(K)$ qui à (P, Q, M) associe PMQ définit une action de $GL_n(K) \times GL_p(K)$ sur $M_{n,p}(K)$, appelée action par équivalence.
2. Remarque : deux matrices appartiennent à la même orbite d'équivalence si, et seulement si, elles représentent une même application linéaire $K^n \rightarrow K^p$ dans des couples de bases différents.
3. Théorème : Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang. De plus, toute matrice de rang r est équivalente à la matrice $J_{n,p,r}$.
4. Application (anachronique ici) : l'ensemble des matrices de rang r est connexe par arcs dans $GL_n(\mathbb{C})$ (cf infra)
5. Exemple : pour toute décomposition en somme directe $E = F \oplus G$, le projecteur sur F parallèlement à G est représenté par la matrice $J_{n, \dim(F)}$ dans une base adaptée.

2 - Action par similitude

1. Définition : l'application $(P, M) \mapsto PMP^{-1}$ définit une action de groupe linéaire sur l'espace des matrices carrées, appelée action par similitude ou par conjugaison.
2. Remarque : deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes de K^n .
3. Proposition : le rang, la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont invariants sur les orbites de similitude.
4. Contre-exemple : deux matrices de Jordan qui ont même rang, même trace, même déterminant, même polynôme cara et même polynôme mini ne sont pas forcément semblables.
5. Définition : matrice compagnon
6. Théorème (Frobenius) : Soit $M \in M_n(K)$. Il existe un unique entier r et une unique famille de polynômes à coefficients dans K $P_r \mid \dots \mid P_1$ tels que M est semblable à la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les matrices compagnons des (P_i) . Une telle forme est appelée réduite de Frobenius. Ces polynômes sont appelés les invariants de similitude de M et déterminent complètement l'orbite de similitude de M .
7. Application : soient A et B deux matrices $M_n(K)$ et L/K une extension de corps. A et B sont semblables sous l'action de $GL_n(L)$ ssi elles le sont sous l'action de

$$GL_n(K).$$

3 - Action par congruence

1. Définition : l'application $(P, M) \mapsto PMP^T$ définit une action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ (espace des matrices symétriques) dite action de congruence.
On suppose désormais le corps K de caractéristique différente de 2.
2. Remarque : deux matrices symétriques sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent la même forme quadratique sur K^n dans des bases différentes.
3. Théorème (réduction de Gauss) : toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.
4. Exemple : la forme hyperbolique de matrice canoniquement associée $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est congruente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Théorème :
 1. si K est un corps quadratiquement clos, le rang détermine entièrement l'orbite de congruence.
 2. Si K est un corps fini, deux matrices symétriques inversibles sont congruentes si, et seulement si, leurs déterminants sont égaux modulo le groupe des carrés de $K^\times$.

III - Propriétés dépendant du corps de base

1 - Groupe linéaire sur un corps fini [Analystan, Perrin]

On fixe q une puissance non triviale d'un nombre premier p et $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments.

1. Proposition : on a les cardinaux suivants :

$$1. |GL_d(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=1}^d (q^d - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^d (q^k - 1)$$

$$2. |SL_d(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^d (q^k - 1)$$

2. Application 1 : soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ (l'ensemble des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont l'inverse est encore à coefficients dans $\mathbb{Z}$).
Le cardinal de G est majoré par $\prod_{k=1}^n (3^k - 3^{k-1})$.

3. Proposition 2 (DVT 1): soient X et Y deux variables aléatoires uniformes sur $GL(E)$, où E est un $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel de dimension 2. On a :

$$\mathbb{P}(XY = YX) = \frac{1}{q^2 - q}$$

4. Remarque : quelque soit le groupe G fini et non abélien, la probabilité que deux éléments commutent dans ce groupe est majoré par $5/8$, et cette borne est optimale. Ainsi, dans le cas du groupe linéaire, on se trouve toujours dans un cas sous-optimal.

2 - Aspects topologiques lorsque $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ [Rombaldi, Isenmann-Pecatte]

On fixe dans la suite $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Proposition : si $\|\cdot\|$ est une norme sur E , l'application $|||\cdot||| : u \mapsto \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ est une norme sur $GL(E)$ appelée norme subordonnée à $\|\cdot\|$, telle que la composition et l'inversion de $GL(E)$ sont continues. De plus, $|||u \circ v||| \leq |||u||| \times |||v|||$.
2. Application : l'application $\exp : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ est normalement convergente sur les compacts et de classe C^1 .
3. Proposition (topologie de $GL(E)$) : le groupe linéaire est un ouvert dense dans $\mathcal{L}(E)$. Si de plus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il est connexe par arcs.
4. Application : calcul de la différentielle du déterminant.
On suppose dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
5. Proposition / définition (groupe orthogonal) : l'ensemble des isométries de E est un sous-groupe compact de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal.
6. Lemme : soit G un sous-groupe de $GL(E)$. Alors G est conjugué à un sous-groupe de $O(E)$ si, et seulement si, il existe un produit scalaire invariant par G sur E .
7. Théorème (Kakutani) : soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K une partie compacte, convexe et non vide de E . Si pour tout $g \in G$, $g(K) \subset K$, il existe un point fixe commun à tous les éléments de G dans K . (DVT 2)

8. Application : tout sous-groupe compact de $GL(E)$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal (DVT 2).