

Rapport du jury

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Il est en particulier important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n -linéaires alternées en dimension n , isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc. Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémums liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

Références

- [Algèbre linéaire - J. Grifone](#)
- [Algèbre et probabilités - X. Gourdon](#)

- [Théorie de Galois - Escofier](#)
- [Objectif agrégation](#)

Développements

- [Réduction de Frobenius](#)
- [Sous-espace engendré par les translatés](#)
- [Algorithme de Berlekamp](#) ?

Méta-plan

1. Théorie de la dimension
 1. Dimension d'un espace vectoriel
 2. Applications linéaires. Rang.
2. Réduction des endomorphismes
 1. Recherche de sous-espaces stables
 2. Théorèmes de réduction
3. Théorie des corps
 1. Degré d'une extension de corps
 2. Factorisation de polynômes

Plan détaillé

On fixe K un corps et E un K -espace vectoriel.

I - Théorie de la dimension [Grifone]

1 - Dimension d'un espace vectoriel

1. Définition : famille libre, famille génératrice.
2. Exemples : toute famille qui contient 0 est liée. Un vecteur non nul seul forme une famille libre. E tout entier est une famille génératrice.
Dans toute la suite, on supposera E finiment engendré, c'est-à-dire qui admet une famille génératrice finie.
3. Proposition : soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E . Elle est libre (resp. génératrice) ssi l'application de combinaison linéaire est injective (resp. surjective).

4. Remarque : une famille qui contient une génératrice est génératrice. Une famille contenue dans une libre est libre.
5. Définition : base
6. Exemples : base canonique de K^n . Base duale de E^* .
7. Théorème (base incomplète et extraite): Si $L \subset G$ sont deux familles respectivement libres et génératrices, il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$
8. Corollaire : tout espace vectoriel finiment engendré admet une base.
9. Théorème : Toutes les bases de E ont le même cardinal. On l'appelle "dimension de E ".
10. Théorème : si F est un sev de E , F est de dim finie et sa dimension est plus petite que celle de E . De plus, $F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$.
11. Corollaire : existence d'un supplémentaire.
12. Application (de toute cette partie) : Soit E un sev de dimension finie de $C^0(\mathbb{R})$. E est stable par tous les opérateurs de translation ssi c'est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène autonome. De plus, la dimension de E est l'ordre minimal d'une telle équation différentielle.

2 - Applications linéaires. Rang.

1. Théorème : propriété universelle de la base.
2. Définition : rang d'une application linéaire
3. Exemple : l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum x_i (1, \dots, 1)$ est de rang 1.
4. Théorème (du rang)
5. Corollaire : se E et F sont deux ev de même dimension, $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.
6. Théorème : une matrice est de rang r si, et seulement si, son plus grand mineur non nul est de taille $r \times r$.
7. Application : par cinq points du plan quatre à quatre non alignés passe une et une seule conique.
8. Théorème : une application linéaire est de rang r ssi elle est représentée dans une certaine base par la matrice J_r .

II - Récurrences sur la dimension [Rombaldi, Gourdon]

La dimension est un outil formidable pour effectuer des récurrences. On va voir dans cette partie que de nombreux théorèmes de réduction peuvent s'obtenir

ainsi.

1 - Recherche de supplémentaires stables

1. Définition : annulateur (dualité)
2. Définition : endomorphisme transposé
3. Remarque : dans le cas d'un espace euclidien ou hermitien, le théorème de Riesz fournit un isomorphisme canonique entre E et E^* . L'annulateur s'identifie alors à l'orthogonal et l'endomorphisme transposé à l'adjoint.
4. Proposition : soit F un sev de E ou de E^* de dimension p . Alors F° est de dimension $n - p$.
5. Théorème : u stabilise $F \iff {}^t u$ stabilise F° .
6. Remarque : supposons E euclidien ou hermitien. Si u est auto-adjoint ou orthogonal, u stabilise F ssi u stabilise $F^\perp$. On peut alors exploiter astucieusement la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

2 - Théorèmes de réduction

1. Théorème (spectral)
2. Théorème (réduction de $O_n(\mathbb{R})$)
3. Définition : endomorphisme cyclique
4. Théorème : u cyclique $\iff \chi_u = \pi_u \iff$ la matrice de u est représentée dans une bonne base par C_{π_u} .
5. Définition : polynôme minimal en un vecteur
6. Prop : il existe x tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$
7. Théorème : réduction de Frobenius (DVT 2)
8. Application : toute matrice est semblable à sa transposée.

III - Théorie des corps

1 - Degré d'une extension [Escofier]

1. Définition : degré d'une extension
2. Théorème : soit L/K une extension, $\alpha \in L$ algébrique sur K . Alors $[K(\alpha) : L] = \deg(\pi_{\alpha,L/K})$.
3. Exemples : $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, $[\mathbb{Q}(j) : \mathbb{Q}] = 2$
4. Application : il n'existe aucun corps intermédiaire entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

5. Application : soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Il existe p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\mathbb{F}| = p^n$.
6. Théorème : base télescopique
7. Application : $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 4$.

2 - Factorisation de polynômes [Objectif agreg]

On considère q une puissance non nulle d'un nombre premier et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ unitaire se décomposant en produit d'irréductibles :

$$P = \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$$

1. Proposition : si A est une $\mathbb{F}_q$ algèbre, l'application $x \mapsto x^q$ est un morphisme d'algèbres.
2. Lemme : si P est sans facteur carré, l'entier r est la dimension de l'espace propre associé à 1 de ce morphisme dans la $\mathbb{F}_q$ algèbre $\mathbb{F}_q[X]/\langle P \rangle$. (DVT 2)
3. Application : algorithme de Berlekamp (DVT 3)
4. Proposition : lien avec le pgcd avec la dérivée
5. Application : calcul des facteurs irréductibles et de leur multiplicité.