

Rapport du jury

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Parmi les applications possibles, on peut citer le polynôme caractéristique, les déterminants de Gram (permettant des calculs de distances), le déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), donner des exemples d'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbb{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions.

Références

- [Algèbre - le Grand combat - Berhuy](#)
- [Modules sur les anneaux commutatifs - Diaz Toca, Lombardi et Quitté](#)
- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Corps commutatifs et théorie de Galois - Tauvel](#)

Développements

- [Norme d'une extension](#)
- [Théorème de Pascal](#)

Méta-plan

En vrai, sauter la partie sur les anneaux. C'est trop long sinon.

1. Notion de déterminant
 1. Formes n -linéaires alternées ; déterminants
 2. Propriétés générales des déterminants. Calcul pratique
 3. Exemples de déterminants remarquables.
2. Déterminant et géométrie
 1. Déterminant dans un espace euclidien
 2. Utilisation du déterminant en géométrie affine
3. Norme d'un élément algébrique
 1. Propriétés de la norme
 2. Anneaux d'entiers d'un corps de nombres

Plan détaillé

On peut squizzer la partie II qui est vraiment redondante.

I - Notion de déterminant [Berhuy]

On fixe K un corps.

1 - Construction du déterminant

1. Définition : forme n -linéaire alternée. Application antisymétrique
2. Proposition : une forme alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie en caractéristique différente de 2.
3. Exemples et contre-exemples : $(x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ est alternée. La forme bilinéaire sur $\mathbb{F}^2$ $(a, b) \mapsto ab$ est antisymétrique mais pas alternée.
4. Théorème : l'espace des formes n -linéaires alternées est un K -ev de dimension 1.
5. Définition : déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
6. Un exemple
7. Définition / théorème : définition de déterminant d'une application linéaire
8. Définition / théorème : déterminant d'une matrice
9. Remarque : ces notions sont reliées entre elles de façon intuitive.
10. Des exemples

2 - Propriétés générales des déterminants. Calcul pratique

1. Proposition : multiplicativité du déterminant
2. Proposition : $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi son déterminant est non nul. Un endomorphisme (resp. une matrice) est inversible ssi son déterminant est non nul.
3. Application : $GL_n(K)$ est produit semi-direct de SL_n et de $K^\times$.
4. Définition : mineur
5. Proposition : développement en lignes et colonnes
6. Proposition : Formule de la comatrice
7. Application : formules de Cramer
8. Application : l'inversion est une application C^∞ . L'application que à A, b associe la solution du système $Ax = b$ est C^∞ .
9. Proposition : déterminant d'une matrice triangulaire
10. Proposition : déterminant par blocs
11. Exemples :
12. Proposition : déterminant des matrices élémentaires
13. Application : pivot de Gauss
14. Exemple

3 - Quelques déterminants remarquables [Rombaldi]

1. Définition : matrice circulante
2. Théorème : déterminant circulant général
3. Application : recherche de l'isobarycentre d'un polygone.
4. Théorème : déterminant de Vandermonde
5. Application : Si K est un corps infini, E un K -ev de dim finie et $F_1, \dots, F_r$ des sous-ev stricts, alors $\bigcup F_i \neq E$.

II - Utilisation du déterminant en géométrie

1 - Espaces euclidiens [Rombaldi]

1. Définition : déterminant de Gram
2. Théorème : distance à un sous-espace vectoriel. Projection orthogonale.
3. Application : régression linéaire

4. Proposition : lien déterminant et volume (avec la mesure de Lebesgue)

2 - Déterminants et équations barycentriques [Eiden]

1. Définition : coordonnées barycentriques
2. Remarque : défini seulement au scalaire près.
3. Exemples : Si (A, B, C) est une base affine du plan, alors A a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ est l'isobarycentre de A, B et C . Si M a pour coordonnées $(0, a, b)$, alors $M \in (BC)$.
4. Proposition : Soit (A, B, C) un repère affine. On considère trois points M_i de coordonnées barycentriques (x_i, y_i, z_i) . Ces points sont alignés ssi ...
5. Corollaire : équation barycentrique d'une droite.
6. Théorème : Par cinq points quatre à quatre non alignés passe une et une seule conique (DVT 1)

III - Norme d'éléments algébriques

1 - Propriétés de la norme [Tauvel + de mémoire]

Soit L/K une extension de corps finie.

1. Définition : norme d'un élément.
2. Exemples : $N(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$. Si $\alpha \in K$, alors $N(\alpha) = \alpha$.
3. Proposition : propriétés de la norme (DVT 2)
On prend p un nombre premier et q une puissance de p .
4. Proposition : pour $x \in \mathbb{F}_q$, $N(x) = x^{\frac{q-1}{p-1}}$
5. Application : classification des carrés dans $\mathbb{F}_q$
6. Exemple et contre-exemple.

2 - Etude des entiers d'un corps de nombre [de mémoire]

1. Définition : corps de nombre
2. Exemple et contre-exemple
3. Définition : entier d'un corps de nombre
4. Proposition : Un élément est entier ssi son polynôme minimal est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

5. Exemples : les racines de l'unité sont des entiers des corps cyclotomiques. Les rationnels ne sont jamais entiers.
6. Théorème : inversibles des corps de nombres. (DVT 2)

Une possibilité

Extension au cas des anneaux [Diaz-Toca Lombardi Quitté]

On prend A un anneau commutatif unitaire.

1 - Méthode d'extension

1. Remarque : la notion de matrice s'étend facilement au cas des coefficients dans un anneau, mais la notion d'applications A -linéaires est plus délicate à manipuler. On se limitera au cas des matrices.
2. Exemple : Polynôme caractéristique comme déterminant d'une matrice à coefficients dans $K[X]$.
3. Lemme : Soit $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$. Il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_k] \rightarrow A$ qui coïncide avec le morphisme structural sur $\mathbb{Z}$ et qui envoie X_i sur a_i . Si $M \in \mathbb{M}_{n,p}(A)$ a tous ses coefficients parmi les (a_i) , ϕ s'applique naturelle à A coefficient par coefficients.
4. Corollaire : les items précédents restent vrais dans les anneaux.
5. Corollaire : $A \in GL_n(A) \iff \det(M) \in A^\times$
6. Application : Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, alors A est inversible d'inverse à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $\det(A) \in \{\pm 1\}$.
7. Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$. Les matrices transvections de rapport entier et les matrices de permutation restent inversibles dans $\mathbb{Z}$.

2 - Idéaux déterminantiels

1. Définition : idéal déterminantiel
2. Lemme : Si A et B sont deux matrices équivalentes, tous leurs idéaux déterminantiels sont égaux.
3. Corollaire : lien entre mineurs et rang d'une matrice

4. Application : unicité de la forme de Smith d'une matrice.