

Rapport du jury

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$, en particulier connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $K[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (invertibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître des conséquences théoriques et pratiques. On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. Pour aller plus loin, la candidate ou le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

Références

- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Modules sur les anneaux commutatifs - Diaz Toca, Lombardi et Quitté](#)
- [Objectif agrégation](#)
- [Analyse pour l'agrégation - C. Zuily et H. Queffélec](#)
- [Algèbre et probabilités - X. Gourdon](#)
- [L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann et Pecatte](#)

Développements

- [Réduction de Frobenius](#)

- [Décomposition de Dunford \(algorithme\)](#)

Méta-plan

1. Arithmétique dans $K[u]$
 1. L'algèbre $K[u]$
 2. Action de $K[u]$ sur E
2. Réduction de Frobénius
 1. Espaces u -cycliques
 2. Théorème de Frobénius
3. Polynômes d'endomorphismes et réduction
 1. Aspects spectraux
 2. Décomposition de Dunford
4. Endomorphismes semi-simples (optionnel)

Plan détaillé

I - Aspects arithmétiques de $K[u]$

1 - L'algèbre $K[u]$ [Rombaldi]

On fixe E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

1. Proposition : $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une K -algèbre, et il existe un unique morphisme d'évaluation $ev_u : P \mapsto P(u)$. On appelle $K[u]$ son image.
2. Proposition : $K[u]$ est une sous- K -algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit de la plus petite K -algèbre contenant u .
3. Exemple : si M est une matrice diagonale, $M = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $K[M] = \{\text{Diag}(P(\alpha_i)), P \in K[X]\}$. Si les α_i sont distincts, il s'agit de l'ensemble des matrices diagonales.
4. Définition (polynôme annulateur)
5. Proposition / définition : Si E est de dimension finie il existe un unique polynôme unitaire π_u tel que $\text{Ker}(ev_u) = \langle \pi_u \rangle$. π_u est appelé le polynôme minimal de u .
6. Remarque : par définition de π_u , si P est un polynôme annulateur de u , alors $\pi_u | P$.
7. Exemples :

1. u est nilpotent d'indice p ssi son polynôme minimal est X^p .
2. u est l'homothétie de rapport λ ssi son polynôme minimal est $X - \lambda$.
3. si L/K est une extension finie de corps et α est un élément de L , le polynôme minimal de l'application $m_\alpha : x \mapsto \alpha x$ (K -linéaire) est égal au polynôme minimal de α en tant qu'élément algébrique sur K . En particulier, ce polynôme est irréductible.
4. En dimension infinie, le polynôme minimal peut ne pas exister. Par exemple, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère l'opérateur de shift $S : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$. Il n'est annulé par aucun polynôme non nul. Toutefois, on peut s'autoriser à écrire $\pi_S = 0$.
8. Théorème : $K[u] \cong K[X]/\langle \pi_u \rangle$ (en tant que K -algèbres)
9. Corollaire : $K[u]$ est un corps si, et seulement si, π_u est irréductible dans $K[X]$. Dans ce cas, $K[u]/K$ est une extension de corps de degré $\deg(\pi_u)$.

2 - Action de $K[u]$ sur E [Diaz Toca-Lombardi-Quitté, Zuily-Queffélec, Objectif Agreg]

1. Théorème : un couple (E, u) admet une structure de $K[X]$ -module obtenue en relevant l'action naturelle de $K[u]$ de la façon suivante : $P \cdot x := P(u)(x)$. Réciproquement, tout $K[X]$ -module est isomorphe à un tel $K[X]$ -module.
2. Remarque : les sous-espaces u -stables de E sont alors exactement les sous- $K[X]$ -modules de (E, u) .
3. Application : si π_u est irréductible, tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.
4. Lemme (des noyaux + projecteurs polynomiaux)
5. Exemple : dans le cas où π_u est scindé dans $K[X]$, on obtient ...
6. Application : Soit $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ un polynôme scindé dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ satisfaisant la relation de récurrence linéaire $P(S)(u) = 0$, avec S l'opérateur de shift, est donné par les suites de la forme $u_n = \sum_{i=1}^r P_i(n) \lambda_i^n$, où P_i est un polynôme de degré au plus α_i .
7. Application : si A est une matrice complexe dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle inférieure à $-\mu_0$, avec $\mu_0 > 0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, ||| \exp(tA) ||| \leq C e^{-\mu_0 t}$$

II - Réduction de Frobenius

1 - Espaces u -cycliques [Rombaldi]

On suppose désormais E de dimension finie.

1. Définition (espace u -cyclique) : un sous-espace vectoriel F de E est dit u -cyclique lorsque il est stable par u et qu'il existe $x \in F$ tel que $F = K[X] \cdot x$. En d'autres termes, un tel espace s'identifie à un sous- $K[X]$ -module de (E, u) engendré par x .
2. Théorème : (E, u) est cyclique ssi son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique ssi u est représenté dans une certaine base par la matrice compagnon de π_u .
3. Remarque : l'algèbre $K[u]$ est donc de dimension au plus n , avec égalité ssi (E, u) est cyclique.
4. Définition : polynôme minimal en x
5. Exemple : on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme minimal est $(X - 1)^2$ et son polynôme minimal en e_3 est $X - 1$. Cette matrice n'est donc pas cyclique.
6. Remarque : il s'agit du polynôme minimal de π_u restreint à l'espace cyclique $K[X] \cdot x$.
7. Lemme : il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.
8. Corollaire (Cayley-Hamilton)

2 - Théorème de Frobenius [Gourdon; Diaz-Toca-Lombardi-Quitté]

1. Théorème (Frobenius) : il existe une unique suite $P_r | \dots | P_1$ de polynômes telle qu'il existe une décomposition $E = \bigoplus E_i$ en somme de sous-espaces u -cycliques de sorte à avoir $P_i = \pi_{u|_{E_i}}$. (DVT 1). Les P_i sont appelés les "invariants de similitude de u " (DVT 1)
2. Corollaire : deux matrices M et N sont semblables ssi, étant fixée une base, les endomorphismes qu'elles représentent ont les mêmes invariants de similitude.
3. Application : soit L/K une extension de corps et A et B deux matrices à coefficients dans K . Elles sont K -semblables ssi elles sont L -semblables.

4. Théorème (Smith euclidien) : soit M une matrice à coefficients dans un anneau A euclidien. Il existe une procédure algorithmique qui calcule P et Q deux matrices de déterminant 1 telles que $PAQ = \text{Diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ avec $d_1 \mid \dots \mid d_r$ des éléments de A . De plus, la suite (d_i) est unique et ne dépend que de M .
5. Corollaire : soit A une matrice à coefficients dans K d'invariants de similitude $P_1, \dots, P_r$. La réduite de Smith de $XI_n - A$ dans l'anneau $K[X]$ est $\text{Diag}(P_1, \dots, P_r, 1, \dots, 1)$. Les invariants de similitude peuvent donc être calculés explicitement à l'aide d'un algorithme.
6. Exemple :
7. Théorème (décomposition de Jordan)

III - Liens avec la réduction des endomorphismes

1 - Aspects spectraux [Rombaldi, Isenmann-Pecatte]

1. Proposition : soit P un polynôme annulateur de u . Alors toute valeur propre de u est racine de P . Par ailleurs, les racines du polynôme minimal et du polynôme caractéristique de u sont exactement les valeurs propres de u .
2. Application : un endomorphisme u est nilpotent si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé et si son spectre est réduit à 0.
3. Proposition / définition (décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques)
4. Remarque : les projecteurs spectraux sont des polynômes en u .
5. Théorème : u est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé simple ssi π_u est scindé simple.
6. Exemple : réduction de la matrice circulante
7. Application : isobarycentre d'un polygone
8. Théorème : u est trigonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé ssi π_u est scindé ssi χ_u est scindé
9. Remarque : si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est donc trigonalisable.

2 - Décomposition de Dunford [Rombaldi]

1. Théorème : On suppose χ_u scindé. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que :
 1. d est diagonalisable et n est nilpotents
 2. d et n sont des polynômes en u
 3. $u = d + n$
2. Exemple : lien avec la décomposition de Jordan
3. Application : On prend $K = \mathbb{K}$. soit u admettant la décomposition de Dunford $d + n$. On note p l'indice de nilpotence de n . Alors :

$$\exp(u) = \exp(d) \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^k}{k!}$$

4. Théorème : on suppose χ_u scindé dans K et on pose $P := \frac{\chi_u}{\text{pgcd}(\chi_u, \chi'_u)}$. La suite $w_0 = u, w_{k+1} = w_k - P(w_k)(P'(w_k))^{-1}$ est bien définie, stationnaire et converge vers d en au plus $\lceil \log_2(\dim(E)) \rceil$ étapes. (DVT 2)
5. Remarque : le polynôme P et les inverses $P'(w_k)^{-1}$ peuvent se calculer explicitement à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu.

IV - Endomorphismes semi-simples [Diaz Toca-Lombardi-Quitté, Rombaldi]

Attention, partie dangereuse dont on peut se passer sans soucis.

1. Définition (module semi-simple, endomorphisme semi-simple) : un $K[X]$ -module est dit semi simple lorsque tout sous $K[X]$ -module admet un supplémentaire. Par extension, on dit que u est semi-simple lorsque (E, u) est un $K[X]$ -module semi-simple.
2. Définition (module simple)
3. Exemples :
 1. si E est de dimension 1, c'est un $K[X]$ -module simple (quelque soit u).
 2. Si π_u est irréductible, $K[u]$ est un corps et (E, u) admet une structure de $K[u]$ -espace vectoriel. En particulier, c'est un $K[u]$ -module semi simple, et donc un $K[X]$ -module semi simple.
4. Proposition : un sous- $K[X]$ -module d'un $K[X]$ -module semi simple est semi-simple. Par récurrence immédiate, on déduit qu'un $K[X]$ -module semi-simple est somme directe de $K[X]$ -modules simples.

5. Théorème : u est semi simple si, et seulement si, π_u est sans facteurs irréductibles carrés.
6. Remarque : ainsi, si π_u est premier avec son polynôme dérivé, u est semi-simple. En caractéristique 0, c'est même une équivalence.

7. Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un endomorphisme semi-simple de $\mathbb{R}^4$, et de $\mathbb{C}^4$.