

Rapport du jury

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum. L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutants entre eux. La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications. La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations.

Références

- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Algèbre corporelle - A. Chambert-Loire](#)
- [Objectif agrégation](#)
- [Algèbre et probabilités - X. Gourdon](#)
- [Modules sur les anneaux commutatifs - Diaz Toca, Lombardi et Quitté](#)

Développements

[Réduction de Frobenius](#)

[\[Théorème de Lie-Kolchin\]](#)

Méta-plan

1. Généralités
 1. Définitions et propriétés élémentaires
 2. Liens avec la réduction

2. Sous-espaces stables et dualité
 1. Cas particulier des espaces euclidiens et hermitiens
 2. Dualité dans les espaces vectoriels de dimension finis
3. Décomposition de Frobenius
 1. Endomorphismes cycliques
 2. Facteurs invariants
4. Ouverture sur les $K[X]$ -modules (optionnel)

Plan détaillé

Introduction

En algèbre, quelque soit le domaine, les problèmes étudiés se ramènent souvent à la compréhension d'objets et de morphismes se rapportant à des structures données. Il est fréquent alors de chercher à décomposer les objets et morceaux plus simples ou plus petits, d'étudier chacun de ses morceaux séparément puis de recombinaison tout cela pour conclure l'étude.

L'esprit derrière l'étude des sous-espaces stables n'est pas très différent, comme on le verra dans cette leçon : la compréhension des sous-espaces stables fournira souvent une compréhension plus globale de l'endomorphisme qu'on étudie.

On fixe K un corps quelconque, E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme K -linéaire de E .

I - Généralités

1 - Propriétés élémentaires [Rombaldi]

1. Définition : sous-espace stable
2. Exemples : Le noyau, l'image.
3. Proposition : si E est de dim finie, représentation matricielle.
4. Théorème : si F est un sous-espace stable de E , alors il existe un unique endomorphisme induit par u sur F .
5. Application : soit E un espace de fonctions réelles dérivables de dimension finie stable par dérivation. E est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène et autonome.

6. Contre-exemple : une telle décomposition n'existe pas nécessairement ! En dimension 2, on a une décomposition non-triviale si, et seulement si, u est diagonalisable...
7. Lemme : si u et v commutent, alors v stabilise le noyau et l'image de u .
8. Lemme : si F est stable par u , alors F est stable par tout polynôme en u .
9. Application : si u stabilise F , alors F est stable par $\exp(u)$. En particulier, si u est diagonalisable par blocs, alors $\exp(u)$ se diagonalise par blocs dans la même base avec des blocs de même taille.

2 - Réduction des endomorphismes [Rombaldi]

On impose E de dimension finie.

1. Lemme des noyaux
2. Exemple important : lorsque P est un polynôme annulateur de u , on a $E = \bigoplus \ker(P_i(u)^{\alpha_i})$ où les P_i sont les facteurs irréductibles de P de multiplicité respective α_i .
3. Lemme : les espaces propres et les espaces caractéristiques de u sont stables par u .
4. Corollaire : si χ_u est scindé, alors u est diagonalisable par blocs dans une base adaptée aux sous-espaces caractéristiques.
5. Proposition : si u et v commutent, alors les espaces propres de u sont stables par v .
6. Exemple :
7. Lemme (Frobenius) : soit (u_i) une famille d'endomorphismes deux-à-deux commutatifs et tous trigonalisables. Alors ils sont trigonalisables dans une même base. En d'autres termes, il existe un drapeau complet stable par tous les (u_i) .
8. Théorème (Lie-Kolchin) (DVT 1)

II - Sous-espaces stables et dualité [Rombaldi]

1 - Cas des espaces euclidiens

On fixe $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien.

1. Définition : endomorphisme adjoint
2. Rq : point de vue matriciel

3. Exemple : trouver un exemple pas trop trivial
4. Définition : endomorphisme normal
5. Exemples importants : isométries, endomorphismes symétriques / hermitiens
6. Proposition : si u stabilise un sous-espace F , alors u^* stabilise $F^\perp$.
7. Corollaire : si u est normal et stabilise F , alors il stabilise $F^\perp$.
8. Application : théorème spectral ; théorème de réduction des endomorphismes normaux.

2 - Dualité générale

1. Définition : endomorphisme transposé
2. Définition : annulateur
3. Exemple : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $\text{Vect}(e_1)^\circ = \text{Vect}(e_2^*, \dots, e_n^*)$.
4. Proposition : si $\dim(F) = k$, alors $\dim(F^\circ) = n - k$.
5. Proposition : $(A^\circ)^\circ = A$
6. Proposition : soit F un sous-espace de E . Alors F est stable par u ssi F° est stable par u^T .

III - Réduction de Frobenius

1 - Endomorphismes cycliques [Rombaldi]

1. Définition : endomorphisme cyclique, espace u -cyclique
2. Exemple : un endomorphisme nilpotent de rang n est cyclique.
3. Définition : matrice compagnon
4. Définition : polynôme minimal en un vecteur.
5. Exemple : on considère u l'endo canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique. Alors $\pi_{u, e_1} = 1$ et $\pi_{u, e_2} = X - 1$.
6. Lemme : il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u, x} = \pi_u$.
7. Théorème : On a équivalence entre u cyclique, $\pi_u = \chi_u$ et la matrice de u dans une certaine base est C_{χ_u} .

2 - Facteurs invariants [Gourdon, Objectif Agreg]

1. Théorème / Définition : réduction de Frobenius **DVT 2**

2. Lemme : soit $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. Alors $\text{Vect}(u^k(x) \mid k \in \mathbb{N})$ est un sous-espace cyclique stable par u qui admet un supplémentaire stable par u .
3. Remarque : la forme de Frobenius n'est pas diagonale en générale, même si u est diagonalisable.
4. Remarque : la forme de Frobenius peut être calculée algorithmiquement, contrairement à d'autres formes normales comme la forme de Jordan.
5. Exemple : trouver un truc sympa
6. Application : si L/K est une extension de corps, A et B des matrices à coefficients dans K , elles sont K -semblables ssi elles sont L -semblables. En particulier, si L est un corps de décomposition de $\chi_A \chi_B$, A et B sont K -semblables ssi elles admettent la même forme de Jordan à coefficients dans L .

IV - Ouverture sur les $K[X]$ -modules [Diaz-Toca Lombardi Quitté]

Pour conclure cette leçon, j'ai choisi de présenter une introduction très brève à la théorie de la réduction vue sous l'angle des $K[X]$ -modules. Si j'avais eu à présenter cette leçon devant une vraie classe, j'aurais trouvé cela intéressant de conclure par ce point de vue plus abstrait pour donner à voir que des résultats qui semblent très proches sont expliqués dans un cadre plus général, qui rend beaucoup d'énoncés beaucoup plus naturels.

1. Définition : A -module, application A -linéaire
2. Exemples : les groupes abéliens sont exactement les $\mathbb{Z}$ -modules. Les idéaux de A sont exactement les sous- A -modules de A .
3. Théorème : la donnée d'un $K[X]$ -module est équivalente à la donnée d'un couple (E, u) . Une application $K[X]$ -linéaire $\Phi : (E, u) \rightarrow (G, v)$ est exactement une application K -linéaire telle que $\Phi \circ u = v \circ \Phi$.
4. Exemple : le commutant de u est exactement $\text{End}_{K[X]}(E, u)$.
5. Proposition : un sous-espace F de E est stable par u ssi c'est un sous $K[X]$ -module de (E, u) .
6. Théorème : structure des A -modules de type fini pour A principal.

7. Remarque : le théorème de Frobenius et le théorème de structure des groupes abéliens finis sont deux cas particuliers de ce théorème, ce qui explique la ressemblance entre leurs énoncés !