

Rapport du jury

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni les familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps K et la topologie choisie pour $M_n(K)$. Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

Références

- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Algèbre - le Grand combat - Berhuy](#)
- [Algèbre corporelle - A. Chambert-Loire](#)
- [Calcul différentiel et équations différentielles - S. Benzoni-Gavage](#)
- [Analyse pour l'agrégation - C. Zuily et H. Queffélec](#)

Développements

- [Matrice circulante et suite de polygones](#)
- [Décomposition de Dunford \(algorithme\)](#)

Méta-plan

1. Spectre d'un endomorphisme. Diagonalisation.
 1. Espaces propres
 2. Critères généraux de diagonalisabilité
 3. Quelques cas particuliers

2. Aspects topologiques dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$
3. Décomposition de Dunford
 1. Considérations théoriques
 2. Exponentielle de matrices

Plan détaillé

I - Préliminaires théoriques

1 - Espaces propres. Diagonalisation. [Rombaldi]

1. Définition (valeur propre, espace propre, vecteur propre)
2. Exemple : pour $\theta \in]0, \pi[$, la rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^2$ n'a pas de valeur propre réelle, mais a deux valeurs propres complexes conjuguées.
3. Définition (diagonalisable) : un endomorphisme u de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E composée de vecteurs propres de u .
4. Remarque : u est diagonalisable ssi il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
5. Exemples : la rotation d'angle θ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
6. Proposition : Si A est une matrice diagonalisable et P est une matrice inversible telle que $PDP^{-1} = A$ avec D diagonale, on peut calculer les puissances successives de A via $A^k = PD^kP^{-1}$.
7. Application : Calcul de la loi d'une chaîne de Markov
8. Proposition : si F est un sev de E et u est diagonalisable, $u|_F$ est diagonalisable.
9. Théorème : soit (u_i) une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables. Il existe une base commune de diagonalisation des (u_i) .
10. Application : si G est un sous-groupe connexe résoluble de $GL(E)$, avec E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie au moins égale à 2, il existe $\{0\} \subsetneq V \subsetneq E$ un sev stable par tous les éléments de G . [Chambert-Loire]

2 - Critères généraux de diagonalisabilité [Rombaldi]

1. Définition (polynôme minimal)
2. Théorème : π_u et χ_u ont les mêmes racines (sans multiplicité) dans K . Ce sont exactement les valeurs propres de u dans K . De plus, si λ est une telle valeur

propre de multiplicité c_λ en tant que racine de χ_u , on a la majoration $\dim(E_\lambda) \leq c_\lambda$.

3. Corollaire : u est diagonalisable dans K ssi χ_u est scindé dans K et si pour toute valeur propre λ de u , $\dim(E_\lambda) = c_\lambda$.

4. Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (peu importe le corps de base)

5. Théorème : les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable dans K .
2. u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans K .
3. π_u est scindé à racines simples dans K .

6. Corollaire : On suppose que K contient une racine primitive d -ième de l'unité. Alors tout endomorphisme de rang d est diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes des racines d -ièmes de l'unité.

7. Exemple : réduction de la matrice circulante universelle (DVT 1)

8. Application : convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre (DVT 1)

3 - Critères dépendant du corps de base [Berhuy, Rombaldi]

1. Théorème : soit q une puissance non nulle d'un nombre premier. Un endomorphisme de $\mathbb{F}_q^n$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal divise $X^q - X$.

2. Application : l'algorithme suivant détermine la diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{F}_q^n$ en $O(n^3)$ opérations dans $\mathbb{F}_q$:

Entrée : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_q^n)$

Sortie : Vrai ssi u est diagonalisable

Renvoie $u^q - u == 0$

3. Théorème (spectral) : tout endomorphisme auto-adjoint d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable en base orthonormée, et toutes ses valeurs propres sont réelles.
4. Application : soit $\mathcal{C}$ une conique non vide de $\mathbb{R}^2$ à partie quadratique non dégénérée. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ explicitement calculable dans laquelle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme

$a(x - \alpha)^2 + b(y - \beta)^2 = \gamma$ avec a et b non nuls. De plus, $\mathcal{C}$ est une conique à centre, et son centre a pour coordonnées dans cette base (α, β) .

II - Aspects topologiques dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ [Rombaldi]

1. Théorème : l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes est dense dans $M_d(\mathbb{C})$.
2. Application : l'ensemble des polynômes de degré d scindés simples dans $\mathbb{C}$ est dense dans l'ensemble des polynômes de degré d .
3. Théorème : l'adhérence des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ a pour adhérence l'ensemble des matrices trigonalisables réelles.

III - Décomposition de Dunford

1 - Cadre théorique [Rombaldi]

1. Théorème (décomposition de Dunford) : il existe un unique couple $(d, n) \in K[u]$ tels que :
 1. d est diagonalisable et n est nilpotent
 2. $d + n = u$
2. Remarque : u est diagonalisable (resp. nilpotent) ssi $n = 0$ (resp $d = 0$). Par ailleurs, les valeurs propres de d sont exactement les valeurs propres de u .
3. Exemple : une matrice sous forme réduite de Jordan.
4. Théorème : on suppose χ_u scindé dans K et on pose $P := \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$. La suite $w_0 = u$, $w_{k+1} = w_k - P(w_k)(P'(w_k))^{-1}$ est bien définie, stationnaire et converge vers d en au plus $\lceil \log_2(\dim(E)) \rceil$ étapes. (DVT 2)
5. Remarque : le polynôme P et les inverses $P'(w_k)^{-1}$ peuvent se calculer explicitement à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu.
6. Application : u est diagonalisable si, et seulement si, $P(u) = 0$. Ce critère fournit un algorithme permettant de tester la diagonalisabilité en caractéristique 0 sans connaître les valeurs propres de u .

2 - Exponentielles de matrices [Rombaldi, Benzoni, Zuilly-Queffelec]

1. Lemme : calcul de l'exponentielle de matrice d'un endomorphisme diagonalisable. D'un endomorphisme nilpotent.

2. Application : On considère un système différentiel linéaire de la forme $y' = A \cdot y + b(t)$. On suppose qu'on connaît une matrice F inversible telle que $FAF^{-1} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors l'ensemble des solutions de cette équation est donné par :

$$t \mapsto tF^{-1}\text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})F \cdot y_0 + \int_0^t (t-s)F^{-1}\text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})F \cdot b(s) ds$$

où y_0 parcourt l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}^n$.

3. Corollaire : si u admet la décomposition de Dunford $d + n$, en notant $k := \dim(E)$, on a :

$$\exp(u) = \exp(d) \exp(n) = \exp(d) \sum_{i=0}^k \frac{n^i}{i!}$$

4. Application : $\exp(A)$ est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.
5. Remarque : dans le cas particulier d'un bloc de Jordan, on obtiens l'exponentielle de ce bloc sous la forme ...
6. Application : si A est une matrice complexe telle qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour toute valeur propre λ de A , $\Re(\lambda) < -\mu_0$, alors pour tout $t \geq 0$, on a $|||\exp(tA)||| \leq Ce^{-\mu_0 t}$.