

Rapport du jury

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme, et introduire sur R ou C une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres. Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

Références

- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Oraux X/ENS, algèbre 3](#)
- [L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann et Pecatte](#)
- [M. Benaïm, N. El Karoui - Promenade aléatoire](#)

Développements

- [Théorème du min-max de Courant-Fisher](#)
- [Matrice circulante et suite de polygones](#)

Méta-plan

1. Valeurs propres, vecteurs propres
 1. Espaces propres
 2. Polynômes d'endomorphismes
 3. Liens avec la réduction
2. Spectre des matrices remarquables
 1. Matrices stochastiques
 2. Cas hermitien
3. Rayon spectral

Plan détaillé

I - Valeurs propres, vecteurs propres

On fixe K un corps et E un K -espace vectoriel. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 - Espaces propres [Rombaldi]

1. Définition (valeur propre, espace propre, vecteur propre) : Un scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre de E lorsque $E_\lambda := \text{Ker}(u - \lambda I_d)$ est non réduit à 0. Dans ce cas, on appelle espace propre associé à λ l'espace E_λ et vecteur propre associé à λ tout vecteur non nul de E_λ .
2. Remarque : λ est valeur propre ssi il existe x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Les vecteurs propres associés à λ sont exactement les tels vecteurs x .
3. Exemples :
 1. Une matrice est inversible ssi elle n'admet pas 0 comme valeur propre.
 2. La rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[$ de $\mathbb{R}^2$ n'a pas de valeur propre réelle, mais a des valeurs propres complexes.
 3. On désigne par S l'opérateur de shift de $K^{\mathbb{N}} : S : (x_n) \mapsto (x_{n+1})$. Tout scalaire λ est valeur propre de S , et l'espace propre associé est l'ensemble des suites géométriques de raison λ .
4. Proposition : si λ et μ sont deux valeurs propres distincts de u , les espaces propres associés sont en somme directe.
5. Remarque : si E est de dimension n finie, u a au plus n valeurs propres.
6. Lemme : pour $\lambda \in K$, $Sp(u + \lambda I_d) = \lambda + Sp(u)$.

7. Application : $GL_d(\mathbb{K})$ est dense dans $M_d(\mathbb{K})$.

2 - Polynômes d'endomorphismes [Rombaldi]

1. Proposition / définition : il existe un unique morphisme de K -algèbres $ev_u : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ tel que $ev_u(X) = u$. Si E est de dimension finie, son noyau est un idéal non nul de l'anneau principal $K[X]$. On appelle polynôme minimal de u , noté π_u , l'unique générateur unitaire de cet idéal.
2. Proposition : les racines du polynôme minimal de u sont exactement les valeurs propres de u .
3. Application : si u est d'ordre fini d dans $GL(E)$, alors ses valeurs propres sont toutes des racines d -ième de l'unité dans K . De plus, u est diagonalisable si, et seulement si, K contient un corps de décomposition de $X^d - 1$.
4. Théorème (Cayley-Hamilton)
5. Proposition : Les racines du polynôme caractéristique de u dans K sont exactement les valeurs propres de u . De plus, la multiplicité de λ et tant que racine de χ_u est supérieure ou égale à la dimension de E_λ .
6. Application (admis ?) : si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\dim(E) \leq 4$, il existe une méthode algorithmique exacte pour déterminer toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres de u .
7. Corollaire : si L/K est une extension de décomposition de χ_u , la trace de u est égale à la somme de ses valeurs propres dans L pondérées par leur multiplicité algébrique. Le déterminant est égal au produit des valeurs propres de u dans L pondérées par leur multiplicité géométrique.
8. Proposition : soit $P \in K[X]$ un polynôme non nul. La matrice compagnon de P a pour polynôme caractéristique P . Le problème de détermination des valeurs propres est donc équivalent au problème de détermination des racines des polynômes.
9. Remarque (admise) : on ne peut pas espérer de méthode générale de détermination par radicaux des valeurs propres.

3 - Liens avec la réduction [Rombaldi]

On suppose E de dimension finie d .

1. Proposition : u est diagonalisable ssi π_u est scindé simple. u est trigonalisable ssi π_u est scindé ssi χ_u est scindé.

2. Exemple : réduction de la matrice circulante universelle (DVT 1)
3. Application : convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre (DVT 1)
4. Théorème (décomposition de Dunford)
5. Théorème : on pose $P := \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$. La suite de $\mathcal{L}(E)$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} w_0 := u \\ w_{n+1} := w_n - P(w_n)P'(w_n)^{-1} \end{cases}$$

est bien définie, stationnaire au bout de au plus $\lceil \log_2(d) \rceil$ étapes et sa limite est la partie diagonalisable dans la décomposition de Dunford.

6. Application : En caractéristique 0, $P = \frac{\chi_u}{\chi_u \wedge \chi'_u}$. On peut ainsi déterminer si u est diagonalisable et calculer sa décomposition de Dunford sans connaître ses valeurs propres.

II - Spectre de matrices remarquables

On considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on suppose E de dimension finie d .

1 - Matrices stochastiques [Benaïm-El Karoui]

1. Définition (matrice stochastique) : une matrice P à coefficients positifs est dite irréductible si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est 1. On dit qu'elle est irréductible si pour tout (i, j) , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^n(i, j) > 0$.
2. Remarque : Les matrices stochastiques sont exactement les noyaux de transition des chaînes de Markov à espace d'état fini. Elles entretiennent en conséquence un fort lien avec les probabilités.
3. Théorème : Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace d'état fini. (X_n) admet une mesure de probabilité invariante. Si de plus (X_n) est irréductible, une telle mesure est unique et charge tous les points.
4. Corollaire : toute matrice stochastique admet un vecteur propre à gauche à coefficients positifs associé à la valeur propre 1.
5. Application : soit P une matrice stochastique irréductible. Si $x \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur dont les coefficients sont positifs et somment à 1, alors la suite $(x^T \cdot P^n)$ converge au sens de Cesaro vers un vecteur propre de P de valeur propre 1.

2 - Cas hermitien [Rombaldi, Oraux X/ENS]

1. Remarque : E étant supposé de dimension finie, il admet une structure d'espace euclidien ou hermitien.
2. Proposition : si u est auto-adjoint, ses espaces propres sont orthogonaux.
3. Théorème (spectral) : on suppose u auto-adjoint. Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles et u est diagonalisable en base orthonormée.
4. Application : soit $\mathcal{C}$ une conique de $\mathbb{R}^2$ dont la partie quadratique est non dégénérée. Il existe une base orthonogonale de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $\mathcal{C}$ admet une équation de la forme $a(x - \alpha)^2 + b(y - \beta)^2 = \gamma$. Si $\mathcal{C}$ est non vide, c'est alors un conique à centre et les coordonnées du centre dans cette base sont données par (α, β) .
5. Théorème (min-max de Courant-Fisher, DVT 2) : on note $\mathcal{F}_k$ (resp. $\mathcal{G}_k$) l'ensemble des sev de E de dimension k (resp de dimension $n - k + 1$). On appelle quotient de Rayleigh de u l'application

$$R_u : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

On suppose u auto-adjoint. En notant $\lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_n(u)$ les valeurs propres de u , on a les égalités :

$$\lambda_k(u) = \min_{W \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in W \setminus \{0\}} R_u(x) = \max_{W \in \mathcal{G}_k} \min_{x \in W \setminus \{0\}} R_u(x)$$

6. Corollaire (inégalité de perturbation de Weyl, DVT 2) : soient u et v deux endomorphismes auto-adjoints de E , et soit $k \in [[1, n]]$. Alors :

$$\lambda_k(u) + \lambda_1(v) \leq \lambda_k(u + v) \leq \lambda_k(u) + \lambda_n(v)$$

7. Application (continuité des valeurs propres hermitiennes) : l'application $u \mapsto \lambda_k(u)$ est continue sur l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E (DVT 2)
8. Remarque : les applications λ_k ne sont pas différentiables ! On peut par exemple considérer la famille de matrices

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

III - Rayon spectral [Rombaldi]

On se place dans le cas complexe.

1. Définition (rayon spectral)
2. Exemple : une matrice complexe est nilpotente ssi son rayon spectral est nul.
3. Théorème : $\rho(u) = \inf |||u|||$ où l'infimum est pris sur l'ensemble des normes d'opérateurs sur E .
4. Application : si $\rho(u) < 1$, l'endomorphisme $I_d - u$ est inversible, d'inverse $\sum_{n \in \mathbb{N}} u^n$, où cette série est absolument convergente pour une certaine norme d'opérateur.
5. Contre-exemples : I_d est de rayon spectral 1 et $I_d - I_d$ n'est pas inversible. $-I_d$ est également de rayon spectral 1 et $I_d - (-I_d)$ est inversible.
6. Application : l'exponentielle matricielle induit une bijection d'un voisinage de 0 dans l'ensemble $\{A \in M_d(\mathbb{K}) \mid \rho(A) < 1\} + I_d$. On en déduit par exemple qu'il n'existe pas de sous-groupe non-trivial de $GL_d(\mathbb{K})$ arbitrairement petit au sens du diamètre.
7. Théorème : Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. $A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 2. $\forall x_0 \in \mathbb{C}^d, A^n \cdot x_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 3. $\rho(A) < 1$
8. Théorème (Gelfand) : Pour toute matrice $A \in M_d(\mathbb{C})$ et toute norme $\|\cdot\|$ sur $M_d(\mathbb{C})$, la suite $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $\rho(A)$.