

Rapport du jury

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan ou la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

Références

- [Algèbre - le Grand combat - Berhuy](#)
- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Objectif agrégation](#)
- [Algèbre corporelle - A. Chambert-Loire](#)
- [Algèbre et probabilités - X. Gourdon](#)
- [P. Caldero - Carnet de voyage en Analystan](#)

Développements

- [Théorème de Lie-Kolchin](#)
- [Décomposition de Dunford \(algorithme\)](#)

Méta-plan

1. Endomorphismes nilpotents

1. Caractérisation des nilpotents
2. Arithmétique des nilpotents
2. Trigonalisation
 1. Endomorphisme trigonalisable
 2. Trigonalisation simultanée
3. Problèmes de classification
 1. Décomposition de Dunford
 2. Théorèmes de Frobenius et de Jordan

Plan détaillé

On suppose connus les résultats généraux de réduction, en particulier les notions de valeurs propres, d'espaces propres, de polynômes minimaux et caractéristiques.

Dans toute cette leçon, on désignera par K un corps quelconque et par E un K -espace vectoriel de dimension d finie. On fixe u un endomorphisme de E .

I - Nilpotence [Berhuy, Rombaldi]

1 - Caractérisation des nilpotents

1. Définition : u est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$. Une matrice A est dite nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
2. Définition : on appelle indice de nilpotence de u le plus petit tel entier.
3. Exemple : toute matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle est nilpotente.
4. Lemme : u est nilpotent d'indice p si, et seulement si, son polynôme minimal est X^p .
5. Corollaire : u est nilpotent si, et seulement si, $u^d = 0$.
6. Corollaire : la restriction d'un endomorphisme nilpotent à un sous-espace stable est nilpotente.
7. Remarque : un endomorphisme nilpotent a toujours 0 pour unique valeur propre, mais la réciproque est fausse en tout généralité. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

admet 0 pour unique valeur propre réelle mais n'est pas nilpotente.

2 - Arithmétique des nilpotents

1. Proposition (stabilité par opérations) : l'ensemble des nilpotents est un cône contenant 0. De plus, si u et v sont deux endomorphismes qui commutent avec u nilpotent, $u \circ v$ est nilpotent. Si v est également nilpotent, $u + v$ est nilpotent.
2. Théorème : soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p . L'algèbre commutative $K[u]$ est isomorphe en tant que K -algèbre à $K[X]/\langle X^p \rangle$. Elle est de dimension p .
3. Proposition : si u est nilpotent, alors pour tout $\omega \in GL(E)$ commutant avec u , $\omega + u$ est inversible.
4. Proposition : un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

II - Trigonalisation

1 - Endomorphismes trigonalisables [Berhuy]

1. Définition : un endomorphisme u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
2. Exemple : toute matrice diagonalisable est trigonalisable, mais la réciproque est fausse. Les matrices de rotation ne sont pas trigonalisables sur $\mathbb{R}$.
3. Remarque : de façon équivalente, un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, il stabilise un drapeau complet de E .
4. Théorème : un endomorphisme u est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur K .
5. Remarque : les endomorphismes nilpotents sont donc tous trigonalisables, indépendamment du corps de base.
6. Corollaire : la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme trigonalisable est trigonalisable.
7. Corollaire : si A est une matrice à coefficients dans K il existe une extension de corps L/K et une matrice $P \in GL_d(L)$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

8. Application 1 : on se place dans le cas $K = \mathbb{C}$. Pour tout endomorphisme u de E , le rayon spectral de u est donné comme l'infimum des normes d'opérateur sur E de u . On en déduit par exemple que la suite u^k tend vers 0 si, et seulement si, $\rho(u) < 1$, ou encore la convergence de séries matricielles. [Rombaldi]
9. Application 2 : Si q est une puissance d'un nombre premier, l'ensemble des matrices trigonalisables de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ contient $q - 1$ orbites de conjugaison. On en déduit que la probabilité pour que deux matrices tirées au hasard avec probabilité uniforme dans $GL_2(\mathbb{F}_q)$ est $\frac{1}{q^2 - q}$. [Analystan]

2 - Trigonalisation simultanée [Chambert-Loire]

1. Lemme (co-trigonalisation de Frobenius) : soit S une partie commutative de $GL(E)$ dont tous les éléments sont trigonalisables. Il existe un drapeau complet de E stabilisé par tous les éléments de S . En d'autres termes, S est co-trigonalisable.
2. Contre-exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Théorème (Lie-Kolchin) : On fixe $K = \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe connexe et résoluble de $GL(E)$. Alors G est co-trigonalisable. (DVT 1)

III - Problèmes de classification et résolution algorithmique

L'objectif de cette partie est d'exploiter les résultats des parties précédentes pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux endomorphismes soit semblables, si possible de façon algorithmique.

1 - Décomposition de Dunford [Rombaldi]

1. Proposition (espaces caractéristiques) : on suppose χ_u scindé. Il existe une décomposition en sommes directes $E = \bigoplus N_\lambda$ tel que chacun des espaces N_λ est stable par u et $u|_{N_\lambda}$ est la somme de l'homothétie de rapport λ et d'un nilpotent.
2. Application : si A est une matrice complexe dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle inférieure stricte à $-\mu_0$, avec $\mu_0 > 0$, alors :

$$\forall t \geq 0, ||| \exp(tA) ||| \leq C e^{-\mu_0 t}$$

3. Théorème (Dunford) : si χ_u est scindé, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que $u = d + n$, d et n commutent, d soit diagonalisable et n soit nilpotent.
4. Remarque : u est diagonalisable (resp. nilpotent) ssi $n = 0$ (resp $d = 0$).
5. Application : calcul de l'exponentielle d'une matrice à l'aide de sa décomposition de Dunford.
6. Application : $\exp(u)$ est diagonalisable si, et seulement si, u l'est.
7. Théorème : On suppose χ_u scindé. Posons $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$, avec les λ_i les valeurs propres de u dans K , comptées sans multiplicité. La suite de $K[u]$ définie par

$$\begin{cases} w_0 = u \\ w_{n+1} = w_n - P(w_n)(P'(w_n))^{-1} \end{cases}$$

est bien définie, et stationne en d en au plus $\lceil \log_2(\dim(E)) \rceil$ étapes. (DVT 2)

8. Remarque : le polynôme P peut-être calculé explicitement sans connaître les valeurs propres de u dans la plupart des cas communs. En caractéristique 0, c'est tout simplement $P' \wedge P$. En caractéristique p , on peut utiliser l'algorithme suivant :

Entrée : P

Si $P \wedge P' = 0$

Renvoyer P

Si $P \wedge P' = P$

Renvoyer Algo($\sqrt[p]{P}$)

Sinon

Renvoyer Algo($P \wedge P'$) $\times$ Algo($\frac{P}{P \wedge P'}$)

9. Remarque 2 : l'inverse $P'(w_n)$ peut être calculé à l'aide d'une relation de Bézout
10. Application : u est diagonalisable si, et seulement, $P(u) = 0$.
11. Théorème : deux endomorphismes $u = d + n$ et $u' = d' + n'$ sont semblables si, et seulement si, d et d' ont même polynôme caractéristique, et si n et n' sont semblables.

2 - Théorèmes de Frobenius et de Jordan [Gourdon, Rombaldi]

1. Définition (matrice compagnon)

2. Théorème (Frobenius)
3. Remarque : les invariants de similitude décrivent entièrement les orbites de similitude.
4. Exemple : pour un endomorphisme nilpotent
5. Corollaire (théorème de Jordan)
6. Exemple : sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'endomorphisme de dérivation se met immédiatement sous forme de Jordan dans la base $e_k := \frac{n!}{k!} X^k$.
7. Application : calcul explicite de $\exp(u)$ en fonction de la forme de Jordan de u .
8. Proposition : supposons u nilpotent. Le nombre de blocs de Jordan de taille k dans la décomposition de Jordan de u est exactement

$$\dim(\text{Ker}(u^k)) - \dim(\text{Ker}(u^{k-1}))$$

9. Application : algorithme permettant de tester si deux endomorphismes au polynôme caractéristique scindé sont semblables en $O(n^4)$ (*je crois*)