

Rapport du jury

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidates et candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques. Les candidates et candidats maîtrisant ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible, la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), ou la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

Références

- [Mathématiques pour l'Agrégation \(Algèbre\) - J.E. Rombaldi](#)
- [Géométrie - M. Audin](#)
- [Petit guide du calcul différentiel - Rouvière](#)
- [Chabanol et Ruch, Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation](#)

Développements

- [Théorème du min-max de Courant-Fisher](#)
- [Lemme de Morse](#)

Méta-plan

1. Matrices symétriques en algèbre linéaire
 1. Adjonction
 2. Théorème spectral
2. Matrices symétriques en algèbre bilinéaire
 1. Formes quadratiques et matrices symétriques
 2. Orbite de congruence d'une matrice symétrique
3. Matrices positives, définies positives
 1. Les ensembles S_n^+ et S_n^{++}
 2. Vecteurs gaussiens

Plan détaillé

Intro : On va dans cette leçon s'intéresser à la notion de matrices symétriques et hermitiennes, c'est-à-dire de matrices qui sont égales à leur trans-conjuguée. Ces matrices apparaissent naturellement à la fois en algèbre euclidienne et en algèbre bilinéaire, une double nature qu'on illustrera dans nos deux premières parties. La première situera ces matrices dans le cadre de l'algèbre linéaire euclidienne et visera à classer les matrices symétriques à conjugaison près par une matrice orthogonale / unitaire. La seconde explorera plutôt la théorie des formes quadratiques et proposera une classification sous l'action par congruence du groupe linéaire. Enfin, la troisième partie se concentrera sur le cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives, dont l'étude algébrique permet de répondre à des questions analytiques et probabilistes.

I - Matrices symétriques en algèbre linéaire

On fixe $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien de dimension finie d .

1 - Adjonction [Rombaldi]

1. Proposition / définition (endomorphisme adjoint) : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme u^* tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

On appelle u^* l'adjoint de u .

2. Proposition : soit $u \in L(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^*$, où M^* désigne la matrice transconjugée de M .

3. Définition (endomorphisme auto-adjoint) : u est dit auto-adjoint si $u = u^*$.
L'ensemble des tels endomorphismes, noté $S(E)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
4. Exemples :
 1. Les projecteurs orthogonaux sont auto-adjoints.
5. Proposition : Soit M une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. M est symétrique (resp. hermitienne) i.e. $M^* = M$.
 2. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{K}^d$ telle que l'endomorphisme associé à M dans cette base est auto-adjoint
 3. Pour toute base orthonormée de $\mathbb{K}^d$, l'endomorphisme associé à M est auto-adjoint.
6. Proposition : Soit u un endomorphisme de E , F un sous-espace vectoriel de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. F est stable par u .
 2. $F^\perp$ est stable par u^* .
7. Proposition : On a une décomposition en somme directe $\mathcal{L}(E) = S(E) \oplus \mathfrak{A}(E)$, où $\mathfrak{A}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes tels que $u^* = -u$.

2 - Spectre des matrices auto-adjointes [Rombaldi, Oraux X/ENS]

1. Lemme : soit u un endomorphisme auto-adjoint. u admet une valeur propre réelle.
2. Théorème (spectral) : soit u un endomorphisme auto-adjoint. Il existe une base orthonormée de E composée de vecteurs propres de u . De plus, toutes les valeurs propres de u sont réelles.
3. Remarque : matriciellement, cela signifie que toute matrice symétrique (resp. hermitienne) est orthogonalement (resp. unitairement) semblable à une matrice diagonale à diagonale réelle.
4. Contre-exemple : si M est symétrique complexe, le théorème spectral ne s'applique pas. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{i, -i\}$.
5. Corollaire : soient M et N deux matrices symétriques (resp. hermitiennes). Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M et N sont semblables.
 2. M et N sont orthogonalement semblables (resp. unitairement semblables)
 3. M et N ont même polynôme caractéristique.
6. Définition (quotient de Rayleigh) : pour u autoadjoint, on définit son quotient de Rayleigh par

$$R_u : x \mapsto \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

sur $\mathbb{E} \setminus \{0\}$.

7. Théorème (min-max de Courant-Fischer) : soit u un endomorphisme auto-adjoint de valeurs propres réelles $\lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_d(u)$. Les valeurs propres de u sont données par les formules :

$$\begin{cases} \lambda_k(u) = \min_{W \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in W} R_u(x) \\ \lambda_k(u) = \max_{W \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \min_{x \in W} R_u(x) \end{cases}$$

où $\mathcal{F}_k$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E privés de l'origine. (DVT 1)

8. Corollaire (inégalité de perturbation de Weyl, DVT 1) : Si u et v sont deux endomorphismes autoadjoints, on a :

$$\lambda_1(v) + \lambda_k(u) \leq \lambda_k(u + v) \leq \lambda_n(v) + \lambda_k(u)$$

9. Application : les applications λ_k sont 1-lipschitziennes sur l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints. (DVT 1)

II - Matrices symétriques en algèbre bilinéaire

1 - Formes quadratiques et matrices symétriques [Rombaldi, Audin]

1. Définition (matrice d'une forme quadratique) : soit q une forme quadratique réelle. On définit la matrice de q dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ comme la matrice $(\check{q}(e_i, e_j))_{i,j}$.

2. Exemples :

1. la forme hyperbolique $q : (x, y) \mapsto 2xy$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Le carré de la norme euclidienne a pour matrice l'identité dans n'importe quelle base orthonormée.
3. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en un point x_0 . La différentielle seconde $d^2 f(x_0)$ s'identifie à une forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique est appelée "matrice hessienne au point x_0 de f " (lemme de Schwarz)
3. Proposition : si q est une forme quadratique sur E et $\mathcal{B}$ une base de E , la matrice $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est symétrique. De plus, si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées dans $\mathcal{B}$ X et Y , on a :

$$\check{q}(x, y) = X^T M Y$$

Réciproquement, toute matrice symétrique définit une forme quadratique sur E via cette formule.

4. Proposition (changement de base) : soit q une forme quadratique réelle. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases et P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, on a la relation :

$$P \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) P^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(q)$$

5. Théorème (réduction simultanée 1) : soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni d'une forme quadratique q . Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de q dans cette base soit diagonale.
6. Application : soit $\mathcal{C}$ une conique géométrique non dégénérée, non-vide du plan affine. On suppose que $\mathcal{C}$ admet un centre unique. Il existe un repère affine orthonormé du plan tel que $\mathcal{C}$ admette une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a} + \epsilon \frac{y^2}{b} = 1$$

avec $\epsilon = \pm 1$ et $a, b > 0$.

2 - Orbites de congruence des matrices symétriques [Rombaldi, Rouvière]

1. Définition / Proposition : L'application $P \mapsto (M \mapsto P \cdot M \cdot P^T)$ définit une action du groupe linéaire sur l'ensemble des matrices symétriques, dite action de congruence.
2. Théorème (inertie de Sylvester) : soit q une forme quadratique réelle. Il existe une base q -orthogonale $\mathcal{B}$ et une unique paire d'entiers (p, q) tels que

$$Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le couple (p, q) est appelé *signature* de M .

3. Exemple : la forme hyperbolique sur $\mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto 2xy$ a pour signature $(1, -1)$.
4. Corollaire : Soient M et N deux matrices symétriques réelles. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. M et N sont congruentes.
 2. Il existe q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^d$ telles que $Mat_{\mathcal{B}}(q) = M$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(q) = N$.
 3. Les formes quadratiques canoniquement associées à M et N ont même signature.
5. Lemme (DVT 2) : Soit A_0 une matrice symétrique inversible réelle. Il existe un voisinage V de A_0 dans $S_d(\mathbb{R})$, un voisinage W de l'identité dans $GL_d(\mathbb{R})$ et une application $\Phi : V \rightarrow W$ un C^∞ -difféomorphisme telle que :

$$\forall A \in V, A = \Phi(A)A_0\Phi(A)^T$$

6. Théorème (Morse, DVT 2) : soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe C^3 avec U un ouvert contenant 0. On suppose que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. On suppose de plus que $d^2f(0)$ est non dégénérée. Notons $(p, n - p)$ la signature de $d^2f(0)$. Il existe V et W deux voisinages de l'origine et un C^1 difféomorphisme $u : V \rightarrow W$ envoyant 0 sur 0 tel que

$$\forall x \in V, f(x) = u_1(x)^2 + \dots + u_p(x)^2 - u_{p+1}(x)^2 - \dots - u_n(x)^2$$

III - Matrices positives, définies positives

1 - Les ensembles S_n^+ et S_n^{++} [Rombaldi]

1. Définition (endomorphisme positif, définie positif) : une matrice symétrique est dite positive (resp. définie positive) lorsque la forme quadratique canoniquement associée est à valeurs positives (resp. strictement positives sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$)
 1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$ dérivant d'un produit scalaire. La matrice de N^2 dans la base canonique est symétrique définie positive.

2. Soit f une fonction convexe de classe C^2 définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$, à valeurs réelles. La hessienne de f en tout point est symétrique positive.
2. Proposition (caractérisation spectrale) : un endomorphisme auto-adjoint est positif (resp. défini positif) si, et seulement si, toutes les valeurs propres de u sont positives (resp. strictement positives)
3. Application (éléments de calcul spectral) : soit M une matrice symétrique.
 1. Si M est positive, il existe une matrice symétrique $M^{1/2}$ telle que $(M^{1/2})^2 = M$.
 2. Si M est définie positive, il existe une matrice symétrique $\log(M)$ telle que $\exp(\log(M)) = M$.
4. Corollaire (caractérisation par la signature) : une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, sa signature est $(p, 0)$ avec $p \leq d$ (resp. $p = d$)
5. Proposition : L'ensemble S_n^{++} est convexe.
6. Application : les sous-groupes compacts de $GL_d(E)$ sont exactement les sous-groupes conjugués à un sous-groupe de $O(E)$. [Isenmann-Pecatte (dvt sur Kakutani)]

2 - Introduction aux vecteurs gaussiens [Chabanol-Ruch]

1. Définition : un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ tel que toute combinaison linéaire des coordonnées suit une loi normale.
2. Exemples :
 1. Si $(N_1, \dots, N_d)$ sont des gaussiennes indépendantes, elles forment un vecteur gaussien.
 2. Soit ϵ une Rademacher et N une normale, indépendantes. Le vecteur $(N, \epsilon N)$ n'est pas un vecteur gaussien, bien que ces marginales soient normales.
3. Définition (matrice de covariance) : on appelle matrice de covariance d'un vecteur gaussien la matrice symétrique $(Cov(N_i, N_j)) := (\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])])$
4. Proposition : la matrice de covariance d'un vecteur gaussien est symétrique positive.

5. Théorème : Soit X et Y deux vecteurs gaussiens de $\mathbb{R}^d$. Alors X et Y sont égaux en loi si, et seulement si, ils ont même espérance et même matrice de covariance. De plus, si Σ est une matrice symétrique positive, μ un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et $N := (N_1, \dots, N_d)$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes d}$, alors le vecteur aléatoire $\mu + (\Sigma)^{1/2} \cdot N$ est un vecteur gaussien d'espérance μ et de matrice de covariance Σ .
6. Application : soit Σ une matrice symétrique positive de rang r . Si X est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Σ , il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^d$ de dimension r tel que X appartient presque sûrement à F . En particulier, Σ est inversible si et seulement si pour tout sous-espace strict F , $\mathbb{P}(X \in F) < 1$.
7. Théorème (Cochran) : soit X un vecteur gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance $\sigma^2 I_d$. Si $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ avec les (E_i) deux à deux orthogonaux, en notant Π_i la matrice de la projection orthogonale sur E_i dans la base canonique, les $(\Pi_i X)$ sont des vecteurs gaussiens centrés de matrice de covariance Π_i , mutuellement indépendants, et dont la norme au carré suit la loi du χ^2 à $\dim(E_i)$ degrés de liberté.
8. Application (test du χ^2 d'adéquation)