

Rapport du jury

Sans sortir du programme, il y a au moins deux thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L_p sur le cercle ou sur la droite réelle. Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales. Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration. Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C_k , classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1 \circ R_q$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L_p .

Références

- [Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - M. El Amrani](#)
- [Briane Pagès](#)
- [Hirsh-Lacombe](#)
- [Contre-exemples en mathématiques - Hauchecorne](#)
- [Analyse complexe - Queffélec-Queffélec](#)
- [Analyse - X. Gourdon](#)

Développements

- [Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov](#)
- [Echantillonnage de Shannon](#)

Méta-plan

1. Des fonctions, des espaces et des topologies
2. Espaces de fonctions régulières
 1. Convergence de suites de fonctions régulières
 2. Parties denses, parties compactes
3. Espaces L^p
 1. Densité, régularisation
 2. Le cas L^2 : l'atout hilbertien

Plan détaillé

Dans toute cette leçon, on désignera par K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

I - Des fonctions, des espaces et des topologies [El Amrani], [Briane Pagès]

Cette première partie introductive a pour but de présenter les différents espaces que nous allons étudier au cours de cette leçon et de dire quelque mots sur leur topologie.

On exploitera régulièrement la complétude, moins pour ce qu'elle est réellement que parce qu'elle affirme qu'un espace complet est fermé, quelque soit l'espace ambiant considéré, car la complétude n'est pas une notion relative, contrairement à la fermeture.

1. Définition : On dit qu'une fonction est dérivable sur un fermé de $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une fonction dérivable sur un voisinage ouvert de ce fermé qui prolonge cette fonction. Lorsque K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, on notera $C^p(K)$ l'ensemble des fonctions de classe C^p de K dans $\mathbb{R}^d$. Lorsque $p > 1$, on munira implicitement cet ensemble de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Définition : Pour $p \in [1, +\infty]$ et $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ un espace mesuré, on notera $L^p(\mu)$ l'espace des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^d$ de norme p -ième intégrable modulo la relation d'égalité presque partout. On le munira implicitement de la norme $\|\cdot\|_p$.
3. Théorème : l'espace $(C^0(K), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
4. Corollaire : si E est un espace de fonctions définies sur une partie U de $\mathbb{R}^n$, toute suite de fonctions continues sur U qui converge uniformément dans E a sa limite

continue.

5. Exemple : l'exponentielle matricielle est continue.
6. Théorème (Riesz-Fischer) : pour tout p , l'espace $L^p(\mu)$ est complet.
7. Application : si $\mathfrak{G}$ est une sous-tribu de $\mathfrak{F}$, toute suite de fonctions $\mathfrak{G}$ -mesurables de $L^p(\mu)$ qui converge dans $L^p(\mu)$ a sa limite $\mathfrak{G}$ -mesurable.
8. Définition (espace de Schwartz) : on appelle espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$ l'ensemble $S(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ telle que pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$,
$$|x|^j |f^{(k)}(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$
9. Exemple : la gaussienne $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à l'espace de Schwartz.
10. Proposition : L'espace de Schwartz est stable par dérivation et multiplication par une fonction polynomiale. De plus, il est inclus dans tous les espaces L^p contre la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
11. Remarque : les différentes normes possibles sur l'espace de Schwartz ne sont pas équivalentes. Par exemple la suite $x \mapsto e^{-nx^2}$ est bornée pour la norme infinie mais pas pour les normes $p < +\infty$. Par ailleurs, l'espace de Schwartz n'est complet pour aucune de ces normes.

II - Espaces de fonctions régulières

1 - Convergence de suites de fonctions régulières [Gourdon], [Queffelec]

1. Proposition : l'espace $C^p(K)$ est complet pour la norme

$$\|f\|_{C^p} := \sum_{k=0}^p \|f^{(k)}\|_\infty$$

2. Contre-exemple : La suite de fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge dans $C^0([0, 1])$ mais pas dans $C^1([0, 1])$.
3. Corollaire : si (f_n) est une suite de fonctions de classe C^p sur une partie U de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $0 \leq k \leq p$, $f_n^{(k)}$ converge uniformément vers une fonction g_k , alors $g_0 \in C^p(U)$ et $g_k = g_0^{(k)}$.
4. Exemple : soit $f \in S(\mathbb{R})$. La fonction 1-périodisée issue de f :

$$f_{per} : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n)$$

est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Théorème (Weierstrass holomorphe) : L'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est fermé dans $C^0(U)$ au sens de la convergence localement uniforme.
6. Application : la fonction ζ de Riemann est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$.

2 - Parties denses, parties compactes [Queffelec], [Hirsch-Lacombe]

1. Théorème (Weierstrass polynomial) : l'ensemble des fonctions polynomiales sur K est dense dans $C^0(K)$.
2. Contre-exemples :
 1. La fonction exponentielle n'est pas limite uniforme de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, et donc les polynômes ne sont pas denses dans $C^0(\mathbb{R})$.
 2. La conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas limite uniforme de fonctions polynomiales sur le disque unité. Les polynômes ne sont donc en général pas denses dans $C^0(K)$ lorsque K est un compact de $\mathbb{C}$.
3. Application : soient X et Y deux variables aléatoires réelles presque sûrement à valeurs dans un compact K . Si X et Y ont les mêmes moments, elles sont égales en loi.
4. Corollaire : l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$ est dense l'espace de Schwartz (pour la topologie de la norme infinie) qui est lui-même dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini.
5. Application (théorème de Lévy) : soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. (X_n) converge en loi vers X si, et seulement si, les fonctions caractéristiques des (X_n) convergent simplement vers la fonction caractéristique de X .
6. Théorème (Arzelà-Ascoli) : soit A une partie de $C^0(K)$. A est relativement compacte dans K si, et seulement si, les deux assertions suivantes sont vérifiées :
 1. $\forall x \in K, \{f(x), f \in A\}$ est borné dans $\mathbb{R}^d$.
 2. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in A, \forall (x, y) \in K, \|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$.
7. Application : soit $N : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un noyau continu. On considère l'opérateur

$$T_N : f \mapsto (x \mapsto \int_0^1 N(x, y) f(y) dy)$$

défini sur $C^0([0, 1])$. Cet opérateur est compact, c'est-à-dire que l'image de la boule unité de $C^0([0, 1])$ par T_N est compacte.

III - Espaces L^p

1 - Densité et régularisation dans les espaces L^p [El Amrani], [Hirsch-Lacombe]

1. Théorème : l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ est dense dans L^p , pour $p < +\infty$ (admis)
2. Définition (produit de convolution) : pour deux fonctions mesurables f et g , on définit lorsqu'il a du sens le produit de convolution

$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t) dt$$

3. Définition (suite régularisante) : on appelle suite régularisante toute suite de fonction Φ_n C^∞ positive, d'intégrale 1 et telle que

$$\forall \epsilon > 0, \int_{|x| \geq \epsilon} \Phi_n(x) dx \rightarrow 0$$

4. Exemple : noyau de gauss
5. Théorème : soit $1 \leq p < +\infty$. Pour toute fonction $f \in L^p(\lambda)$ et toute suite régularisante (Φ_n) , la convoluée $f \star \Phi_n$ est bien définie pour tout n , appartient à $L^p(\lambda)$ et est de classe C^∞ . De plus, elle converge dans L^p vers f .
6. Application (inversion de Fourier) : soit f une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est encore intégrable. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

7. Théorème : l'espace de Schwartz est dense dans L^p pour tout $1 \leq p < +\infty$ pour la topologie de la norme p .
8. Application : il existe un unique automorphisme bicontinu de $L^2(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{F}$, qui coïncide avec la transformée de Fourier sur L^2 . Son inverse est l'opérateur $f \mapsto \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\check{f}]$ où $\check{f}$ est la fonction $x \mapsto f(-x)$.
9. Théorème (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) (DVT 1)

2 - L'espace L^2 : l'atout hilbertien [El Amrani]

1. Théorème : $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert pour la topologie de la norme 2.
2. Application 1 (espérance conditionnelle) : soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathfrak{G}$ une sous tribu de $\mathfrak{F}$. Il existe une unique variable aléatoire réelle $\mathfrak{G}$ -mesurable, notée $\mathbb{E}[X | \mathfrak{G}]$ telle que

$$\forall A \in \mathfrak{G}, \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A \mathbb{E}[X | \mathfrak{G}](\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

On l'appelle espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathfrak{G}$.

3. Application 2 (polynôme de meilleur approximation : Legendre) : soit (L_n) l'orthonormalisé de Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ dans $L^2(1_{[-1,1]}d\lambda)$. Pour toute fonction f de classe L^2 sur $[-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme de degré n qui minimise la distance à f en norme 2. Celui-ci est donné par

$$P_n = \sum_{k=0}^n \left(\int_{-1}^1 L_k(x) f(x) dx \right) L_k$$

4. Définition : on appelle BL^2 l'espace des fonctions L^2 sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est à support dans $[-1, 1]$.
5. Exemple : la transformée de Fourier du sinus cardinal sur $[-1, 1]$ est la fonction porte, à support compact. Celui-ci est donc un élément de BL^2 .
6. Proposition (propriétés de BL^2 , DVT 2) :
 1. Les fonctions de BL^2 admettent un représentant continu qui tend vers 0 à l'infini. De plus, la norme infinie est dominée par la norme 2 sur BL^2 .
 2. BL^2 est un sous-espace de Hilbert de L^2 . Une base hilbertienne en est donnée par ...
7. Théorème (Schannon) : soit f une fonction de BL^2 . Alors $f = \dots$ où cette série converge absolument et dans L^2 .
8. Remarque : ce théorème traduit en réalité une isométrie entre l'espace BL^2 et l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ fournie par la base hilbertienne de BL^2 . Celle-ci est donnée par : ...