

Rapport du jury

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités. Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris. Sur le second, on peut explorer quelques unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L_p , etc), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global). Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

Références

[Analyse - X. Gourdon](#)

[Analyse fonctionnelle - Haïm Brezis](#)

[Hirsh-Lacombe](#)

[M. Benaïm, N. El Karoui - Promenade aléatoire](#)

[Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - M. El Amrani](#)

[M. Alessandri - Thèmes de géométrie](#)

Développement

[Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov](#)

[Théorème de Kakutani](#)

Méta-plan

1. Compacité dans les espaces de dimension finie
2. Problèmes d'existence
 1. Problèmes d'extrema
 2. Utilisation des valeurs d'adhérence
3. Théorème de Heine
4. Théorème d'Arzelà-Ascoli et applications
5. Compacité faible dans les espaces de Hilbert

Plan détaillé

1. Définition (espace compact) : Soit (X, d) un espace métrique. X est dit compact lorsque de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
2. Théorème (Borel-Lebesgue) : un espace métrique est compact ssi toute suite à valeurs dans X admet une valeur d'adhérence.
3. Théorème : Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors X est compact si, et seulement si, X est précompact, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, X peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ .

I - Compacité dans les espaces de dimension finie [Gourdon]

1. Lemme : la boule unité de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte
2. Théorème : dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes
3. Contre-exemple : on considère $\mathbb{R}[X]$. La suite $((n+1)X^n)$ est bornée en norme 1 mais pas en norme infinie, et donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.
4. Théorème (Riesz) : soit E un evn. Alors E est de dimension finie ssi la boule unité de E est compacte.
5. Application : soit E un evn de dimension finie et F un evn quelconque. Toute application linéaire de E dans F est continue.

II - Problèmes d'existence

1 - Problèmes d'extrema [Gourdon], [Alessandri]

1. Théorème : si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue avec X compact, alors f atteint un maximum et un minimum sur X .
2. Application : soit A une matrice symétrique réelle de taille n . L'application $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ admet un maximum sur la sphère unité. On peut déduire le théorème spectral de ce résultat !
3. Application (théorème de Rolle) : soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue d'un compact d'un espace vectoriel normé dans $\mathbb{R}$, différentiable sur l'intérieur de K . On suppose que f est constante sur ∂K . Alors il existe a dans l'intérieur de K tel que $df(a) = 0$.
4. Corollaire : égalité de Taylor-Lagrange (en dimension 1 évidemment)
5. Proposition : soit X un espace métrique et $x \in X$. Soit K un compact de X ne contenant pas x . Alors $d(x, K) > 0$ et il existe $y \in K$ tel que $d(x, y) = d(x, K)$.
6. Exemples : Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Il existe P une fonction polynomiale de degré au plus n qui minimise $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Dans $L^2_{2\pi}$, il existe une unique fonction f_n minimisant la distance à f et appartenant à $\text{Vect}(e_k \mid |k| \leq n)$. f_n correspond à la n -ième somme partielle de la série de Fourier de f .
7. Remarque : le point minimisant la distance n'est en général pas unique (considérons par exemple K la sphère unité et $x = 0$).
8. Lemme : soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ avec E un espace euclidien. L'application $x \mapsto \max_{g \in G} \|g(x)\|$ est bien définie et définit une norme sur E invariante par toute transformation par des éléments de G . (DVT 1)
9. Application : théorème du point fixe de Kakutani (DVT 2)
10. Corollaire : les sous-groupes compacts de $GL(E)$ sont exactement les sous-groupes conjugués à un sous-groupe de $O(E)$.

2 - Utilisation de valeurs d'adhérence [Promenade aléatoire]

1. Lemme : soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini. Notons $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{X}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{X}) &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{X}} \\ \mathbb{P} &\mapsto (x \mapsto \mathbb{P}(\{x\})) \end{aligned}$$

est une injection linéaire qui permet d'identifier $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ à un compact convexe de $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$.

2. Théorème : soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur $\mathcal{X}$ de noyau de transition P . (X_n) admet une mesure de probabilité invariante. Par ailleurs toute valeur d'adhérence de la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_0 \cdot P^k)$ est une probabilité invariante de (X_n) , où $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ est quelconque.
3. Théorème : soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible sur $\mathcal{X}$. Alors (X_n) admet une unique probabilité invariante, et la suite géométrique $(\mu_0 \cdot P^n)$ converge au sens de Cesàro vers cette probabilité invariante.
4. Exemples :
 1. L'Urne d'Ehrenfest de taille N admet pour unique proba invariante la loi binômiale de paramètres $(n, 1/2)$.
 2. Le modèle de Wright-Fisher admet une infinité de probabilités invariantes données par $p\delta_0 + (1-p)\delta_N$.
 3. La chaîne de Markov déterministe définie sur $\mathbb{N}$ par $X_{n+1} = X_n + n$ n'admet pas de probabilité invariante.

III - Du local au global avec Heine ! [Gonnord-Tosel], [El Amrani]

1. Théorème (Heine) : soit $f : K \rightarrow X$ une application continue entre espaces métriques. On suppose que K est compact. Alors f est uniformément continue.
2. Contre-exemple : l'application $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue.
3. Application : soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, dans le sens où si $\sigma_n := (a = s_0 < s_1, \dots < s_n = b)$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0, la suite

$$\sum_{k=1}^n (s_{k+1} - s_k) f(s_k)$$

est convergente.

4. Application : posons $E = (C^0([0, T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.
L'application

$$G : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto (t \mapsto \int_0^t f(x(s)) ds)$$

est de class C^1 , et sa différentielle est donnée par.

$$dG(x) \cdot h = (t \mapsto \int_0^t df(x(s)) \cdot h(s) ds)$$

5. Corollaire : différentielle du flot [cf poly de développements]
6. Théorème : l'ensemble des application continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < +\infty$.
7. Corollaire : les opérateurs de translation sont uniformément continus sur L^p .
8. Application : régularisation par convolution

IV - Théorème d'Ascoli : détecter des compacts en dimension infinie[Hirsch-Lacombe]

1. Définition (famille équicontinue) : Etant donnés X et E deux espaces métriques et $H \subset C(X, E)$, on dit que la famille H est équicontinue si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall f \in H, \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) \leq \eta \implies d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

2. Théorème (Arzelà-Ascoli) : soit $H \subset C(X, E)$ avec X un espace métrique compact et E un espace métrique complet. On muni H de la distance uniforme. Alors H est compacte si, et seulement si, H est équicontinue et ponctuellement relativement compacte.
3. Exemple : la boule unité de $C^1([0, 1], \mathbb{C})$ est compacte pour la topologie de la norme infinie
4. Application : soit $K \in C^0(I \times I, \mathbb{C})$ avec I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. L'opérateur $V : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ défini par $f \mapsto (t \mapsto \int_I K(t, s)f(s)ds)$ est compact, dans le sens où $V(\bar{B}(0, 1))$ est compact.
5. Application (Cauchy-Peano)
6. Application (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) (DVT 2)

V - Compacité faible dans les espaces de Hilbert [El Amrani], [Hirsch Lacombe]

Dans toute cette partie, on considère H un espace de Hilbert.

1. Définition (suite faiblement convergente)
2. Proposition :

1. toute suite fortement convergente converge.
2. toute suite faiblement convergente est bornée et si x^* désigne sa limite faible, $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n\|$.
3. Remarque : si H est de dimension finie, la convergence faible équivaut à la convergence forte.
4. Exemples :
 1. Si (e_n) est une famille orthonormale de H , elle converge faiblement vers 0 sans converger fortement.
 2. La famille de fonction $(D_N/\sqrt{N})$, où D_N est le N -ième noyau de Dirichlet, converge faiblement vers 0 tout en étant de norme constante égale à 1 dans L^1 . En particulier elle ne converge pas dans L^1 .
5. Théorème (Banach-Alaoglu) : soit (x_n) une suite bornée de H . Il existe une sous-suite de (x_n) qui converge faiblement.
6. Remarque : il s'agit d'une stricte généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass, vrai en dimension finie, dans un cadre beaucoup plus général.
7. Application : soit $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et coercive. J admet un minimum global sur H .
8. Contre-exemple : on considère E l'ensemble des suites qui tendent vers 0, muni de la norme infinie. Soit (a_n) une suite de réels positifs sommable, de somme 1. On pose $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à (x_n) associe $\sum a_n x_n$ et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à (x_n) associe $\max\{1, \|x_n\|_\infty\} + |1 - \phi(x_n)|$. Alors J est convexe, continue et coercive, mais n'atteint pas de minimum sur E .