

Rapport du jury

Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace "d'un seul tenant", que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global. La seconde est abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum). En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbb{R}$, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon... Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

Références

- [Topologie - Queffelec](#)
- [Analyse complexe - El Amrani](#)
- [Calcul différentiel et équations différentielles - S. Benzoni-Gavage](#)
- [Analyse pour l'agrégation - C. Zuily et H. Queffélec](#)
- [Algèbre corporelle - A. Chambert-Loire](#)
- [Analyse - X. Gourdon](#)

Développements

- [Lemme de la grenouille](#)
- [Théorème de Liapounov](#)

Méta-plan

1. Cadre théorique
 1. Notion de connexité
 2. Théorèmes de connexité
 3. Composantes connexes
2. Exemples de problèmes résolus par connexité
 1. Equations différentielles
 2. Analyse complexe

Plan détaillé

I - Cadre théorique [Queffelec (topologie), Gourdon]

1 - Notion de connexité

1. Définition (partie connexe)
2. Proposition : Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. X est connexe
 2. Si U_1 et U_2 sont deux ouverts de X tels que $X = U_1 \sqcup U_2$, alors l'un des deux est vide.
 3. Idem avec des fermés
3. Exemples :
 1. tout evn est connexe. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.
 2. Deux points distincts d'un espace métrique forment une partie non-connexe.
 3. Si (x_n) est une suite de points d'un espace métrique compact telle que $d(x_n, x_{n+1})$ tende vers 0, l'ensemble de ses valeurs d'adhérences est connexe. On en déduit par exemple que si (x_n) est une suite réelle à valeurs dans $[0, 1]$ définie par une relation de récurrence de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ avec f continue, cette suite converge ssi ses accroissements tendent vers 0 (DVT 1)
4. Définition : connexité par arcs
5. Proposition : connexe par arcs $\implies$ connexe
6. Exemples : $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs, mais $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ ne l'est pas. L'adhérence du graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$ est connexe mais pas connexe par arcs.

7. Proposition : Dans un EVN, on a la chaîne d'implications suivantes : convexe $\implies$ étoilé $\implies$ connexe par arcs
8. Contre-exemples : $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ est étoilé en 0 dans $\mathbb{C}$ mais pas convexe. La sphère unité de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs mais pas étoilée.

2 - Théorèmes de connexité

1. Théorème : soit f une application continue entre espaces métriques. L'image de toute partie connexe par f est encore connexe.
2. Corollaire : théorème des valeurs intermédiaires.
3. Application : Le groupe orthogonale réel n'est pas connexe, puisque son image par le déterminant n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.
4. Proposition : Si $C_1, \dots, C_n$ sont des parties connexes d'un espace métrique telles que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, alors l'union des C_i est connexe.
5. Proposition : Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de parties connexes d'un espace métrique ayant un point en commun, leur union est connexe.
6. Application : Soit G un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{K})$ connexe. Alors le groupe dérivé de G est encore connexe.
7. Exemple : $SL_d(\mathbb{C})$ est connexe.
8. Corollaire (Lie-Kolchin) [Chambert-Loire]

3 - Composantes connexes

1. Proposition : Soit (X, d) un espace métrique. La relation $x \sim y \iff \exists C \subset X$ connexe tel que $x \in C, y \in C$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences forment une partition de X en parties connexes, appelées composantes connexes.
2. Exemple : $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes. Si X est un espace métrique fini, ses composantes connexes sont exactement ses singletons.
3. Remarque : X est connexe si, et seulement si, il n'a qu'une seule composante connexe.
4. Application : Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont exactement les unions (quelconques) disjointes d'intervalles ouverts.
5. Remarque : calcul de la mesure d'un ouvert de $\mathbb{R}$.
6. Théorème : Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable. Si df est nulle sur U , f est constante sur les composantes connexes de U .

7. Contre-exemple : Application définie par morceaux de différentielle nulle mais pas constante.

II - Exemples de problèmes résolus par connexité

On va présenter ici plusieurs résultats dont la démonstration repose sur des théorèmes de connexité dans des domaines variés des maths

1 - Equations différentielle [Benzoni, Zuily-Queffélec]

1. Définition : équation différentielle issue d'un champ de vecteur.
2. Théorème (des bouts)
3. Exemple : les solutions du système de Lotka-Volterra sont globales car contenues dans les lignes de niveau d'une intégrale première à fibres compactes.
4. Lemme : soit f un champ de vecteur C^1 tel que $df(0) = 0$ et $Sp(df(0)) \subset]-\infty, -\mu[$ avec $\mu > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ et un voisinage de 0 tel que pour tout x_0 dans ce voisinage, la solution issue de x_0 soit inférieure (en norme) à η . (DVT 2)
5. Théorème (Liapounov) : avec les mêmes hypothèses, le point 0 est un équilibre asymptotiquement stable de l'équa diff. (DVT 2)

2 - Analyse complexe [Queffélec-Queffélec]

1. Théorème (principe des zéros isolés) : soit f une fonction holomorphe sur U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. S'il existe $x^* \in U$ et (x_n) une suite d'éléments distincts de U tendant vers x^* et telle que $f(x_n) = 0$ pour tout n , alors f est nulle sur U .
2. Contre-exemple : on considère f la fonction définie par $z \mapsto z$ sur $B(0, 1)$ et par 0 sur $\mathbb{C} \setminus \bar{B}(0, 1)$.
3. Application : si f est holomorphe sur U et K est un compact de U , alors f n'a qu'un nombre fini de zéros dans K .
4. Corollaire (principe du prolongement analytique) : soit f une fonction holomorphe sur un domaine U et soit Ω un ouvert connexe contenant U . Alors il existe au plus une fonction $\bar{f}$ holomorphe sur Ω telle que $\bar{f}|_U = f$.
5. Exemples :
 1. la fonction définie sur $B(0, 1)$ comme la somme de la série entière $\sum z^n$ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.

2. Elle admet également le prolongement sur $\mathbb{C} \setminus \bar{B}(0, 1)$ donné par $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$ et 0 sinon.
6. Théorème (principe du maximum) : soit U un domaine connexe ouvert et f une fonction non constante, continue sur $\bar{U}$ et holomorphe sur U . Alors $|f|$ n'a de maximum local que sur ∂U .