

Rapport du jury

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications. Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle. Les espaces L_p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach. Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Références

- [Calcul différentiel - El Amrani](#)
- [Analyse - X. Gourdon](#)
- [Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - M. El Amrani](#)
- [Briane Pagès](#)
- [Analyse complexe - Queffélec-Queffélec](#)
- [M. Benaïm, N. El Karoui - Promenade aléatoire](#)
- [L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann et Pecatte](#)

Développements

- [Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente](#)
- [Optimisation dans un Hilbert](#)

Méta-plan

1. Topologie des espaces complets

1. Complétude
2. Théorèmes de point fixe
3. Théorème de prolongement
2. Théorie de Baire
 1. Le lemme de Baire
 2. Quelques corollaires
3. Espaces vectoriels complets
 1. Espaces de Banach
 2. Espaces de Hilbert

Plan détaillé

I - Topologie des espaces complets [El Amrani calcul diff, Queffélec-Queffélec]

On considère (X, d) un espace métrique.

1 - Complétude

1. Définition : suite de Cauchy
2. Définition : un espace est dit complet si toute suite de Cauchy converge dans X .
Si (X, d) est un espace vectoriel dont la distance est issue d'une norme, on parle d'espace de Banach.
3. Remarque : une suite convergente est de Cauchy, quelque soit l'espace métrique considéré.
4. Exemples : $\mathbb{R}$ est complet. Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets pour n'importe quelle norme. $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet pour la topologie de la norme uniforme sur $[0, 1]$. En effet, la suite $(\sum_{i=0}^N \frac{X^i}{i!})$ est de Cauchy mais ne converge pas.
5. Proposition (manipulation des complets)
 1. Si (X, d) est un espace complet, les parties complètes de X sont exactement les parties fermées de X .
 2. Un espace métrique est compact si, et seulement si, il est complet et précompact.
 3. Si (A_n) est une famille décroissante de fermés d'un espace métrique complet dont le diamètre tend vers 0, alors leur intersection est non vide.

6. Application (lemme de Goursat) : soit U un ouvert $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Si T est un triangle plein inclus dans U , $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

2 - Théorèmes de point fixe

1. Théorème (Banach-Picard) : soit $f : X \rightarrow X$ une application k -contractante, avec X un espace métrique complet. f admet un unique point fixe x^* . Par ailleurs, toute suite d'itérées de f converge vers x^* à vitesse géométrique.
2. Contre-exemples : toutes les hypothèses sont essentielles !
 1. Si X n'est pas complet, par exemple $X = [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $f : x \mapsto x/2$.
 2. Si f ne stabilise pas X , on peut considérer $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3/2]$ qui à x associe $1 + x/2$.
 3. Si f n'est pas contractante, on peut considérer $f : x \mapsto x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Application : méthode de Newton
4. Théorème : point fixe itéré
5. Application (théorème de Cauchy-Lipschitz global)
6. Théorème (point fixe à paramètre) : soit (X, d) un espace complet et (Λ, d) un espace métrique d'indices. Soit $f : X \times \Lambda \rightarrow X$ telle que
 1. $f(x, -)$ est continue
 2. $f(-, \lambda)$ est k -contractante (avec le même k pour chaque λ)Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique $x_\lambda \in X$ point fixe de $f(-, \lambda)$. De plus, l'application $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.
7. Application : théorème des fonctions implicites

3 - Théorème de prolongement

1. Théorème (prolongement des applications uniformément continues) : soit (X, d) un espace métrique et (Y, d) un espace métrique complet. Soit $D \subset X$ une partie dense de X . Soit $f : D \rightarrow Y$ une application uniformément continue. Il existe une unique application $\bar{f} : X \rightarrow Y$ uniformément continue telle que $\bar{f}|_D = f$.
2. Exemple : soit $F : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$ un opérateur linéaire continu. On suppose que F stabilise C^1 et que $F|_{C^1}$ est inversible. Alors F est inversible.
3. Application (théorème d'Arzelà-Ascoli)
4. Exemple : on considère B l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $[0, 1]$ telles que $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 1$. B est compact dans $C^0([0, 1])$.

5. Application : il existe un unique opérateur linéaire continue $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ qui coïncide avec la transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R})$.
6. Exemple : $\mathcal{F}[\text{sinc}] = 2\pi 1_{[-1/2, 1/2]}$.

II - Théorie de Baire [Gourdon]

1 - Le Lemme de Baire

1. Théorème (Baire)
2. Remarque : on a une reformulation duale équivalente en passant au complémentaire.
3. Contre-exemples : toutes les hypothèses sont essentielles !
 1. Si X n'est pas complet, on peut considérer dans $\mathbb{Q}$ les ouverts denses $(\mathbb{Q} \setminus \{q\})_{q \in \mathbb{Q}}$ dont l'intersection est vide.
 2. Si la famille d'ouverts n'est pas dénombrable, on peut prendre $\mathbb{R}$ avec le même contre-exemple.
 3. Si les parties denses ne sont pas supposées ouvertes, on peut observer $\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
4. Application : un espace vectoriel complet de dimension infinie n'admet aucune base dénombrable.
5. Exemple : $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

2 - Corollaires du lemme de Baire

1. Théorème (Banach-Steinhaus, DVT 1) : soit E un espace vectoriel normé complet, et soit F un evn. On considère (Φ_i) une famille quelconque de $\mathcal{L}_c(E, F)$. Alors, exactement l'un est réalisé :
 1. $(\|\Phi_i\|)$ est bornée dans $\mathbb{R}$
 2. L'ensemble des points x tels que $(\|\Phi_i(x)\|)$ est non bornée dans $\mathbb{R}$ est dense dans E .
2. Application : l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques qui ne sont pas somme de leur série de Fourier en 0 est dense dans $C_{2\pi}^0$ (DVT 1)
3. Application : soit $(f_n) \in \mathcal{L}_c(E, F)^\mathbb{N}$ une suite convergeant simplement vers f . Alors f est linéaire et continue.
4. Théorème (image ouverte) : soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire surjective entre espaces de Banach. Alors l'image de tout ouvert par f est ouvert.

5. Contre-exemple : l'application nulle n'est pas ouverte bien que linéaire et continue.
6. Corollaire (isomorphisme de Banach)

III - Espaces de Banach

1 - Considérations générales [Briane Pagès]

1. Théorème : soit E un evn. Alors E est complet si, et seulement si, toute suite absolument convergente d'éléments de E converge dans E .
2. Remarque : la réciproque est fausse, par exemple la suite des $(-1)^n/n$ est convergente mais pas absolument convergente.
3. Exemple (convergence normale) : soit (f_n) une suite de fonctions de $C^0(K, \mathbb{R}^d)$, où K est un compact de $\mathbb{R}^d$. Alors si $\sum \|f_n\|_\infty < +\infty$, la série $\sum f_n$ converge absolument vers une fonction continue.
4. Corollaire (théorème de Riesz-Fisher) : pour $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\mu; \mathbb{K}^d)$ est complet. Par ailleurs, si (f_n) est une suite de fonctions convergeant dans L^p vers f , il existe une sous-suite de (f_n) qui converge presque partout vers f .
5. Application : si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathfrak{F}$, alors $L^p(\mathcal{G})$ est fermé dans $L^p(\mathfrak{F})$
6. Définition (algèbre de Banach)
7. Exemple : Si E est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E), ||| \cdot |||)$ est une algèbre de Banach.
8. Proposition : soit E une algèbre de Banach et $T \in E$ de norme strictement plus petite que 1. Alors $1 - T$ est inversible et son inverse est donné par la série absolument convergente $\sum T^n$.
9. Application : si E est une algèbre de Banach, $E^\times$ est ouvert et l'inversion est différentiable sur $E^\times$.

2 - Espaces de Hilbert [El Amrani Fourier]

1. Définition (espace de Hilbert) : un espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme induite par le produit scalaire.
2. Exemples : tous les espaces euclidiens et hermitiens sont de Hilbert. L^2 est un espace de Hilbert. $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un espace préhilbertien mais pas un espace de Hilbert.

3. Théorème (projection sur un convexe fermé) : Soit C une partie convexe, fermée et non vide de H . Pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\|$ soit minimale. De plus, l'application p_C est 1-lipschitzienne et $p_C(x)$ est caractérisé par $p_C(x) \in C$ et $\forall y \in C, \Re(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0$. Dans le cas particulier où C est un sous-espace vectoriel fermé de H , p_C est linéaire $x - p_C(x) \in C^\perp$.

4. Contre-exemples :

1. $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $L^2([0, 1])$ (et non fermé). Donc pour $f \in L^2$, $p_{\mathbb{R}[X]}(f)$ devrait être f elle-même...
2. La sphère unité de $\mathbb{R}^2$ n'est pas convexe, et il est clair qu'on n'a pas unicité du projeté de 0 sur la sphère.

5. Application (espérance conditionnelle [Benaïm et El Karoui]) : soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $\mathfrak{G}$ une sous-tribu de $\mathfrak{F}$. Pour X une variable aléatoire intégrable définie sur Ω , il existe une unique variable aléatoire $\mathbb{E}[X | \mathfrak{G}]$ intégrable et $\mathfrak{G}$ -mesurable telle que :

$$\forall A \in \mathfrak{G}, \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A \mathbb{E}[X | \mathfrak{G}](\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

6. Corollaire : soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors $(F^\perp)^\perp = \bar{F}$. Par ailleurs, $H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$.

7. Corollaire (théorème de représentation de Riesz)

8. Définition : suite faiblement convergente.

9. Proposition : toute suite fortement convergente est faiblement convergente. La réciproque est vraie en dimension finie.

10. Théorème (Banach Alaoglu) (DVT 2) [Isenmann-Pecatte]

11. Remarque : en dimension finie, c'est exactement le théorème de Riesz.

12. Application : soit $J : H \rightarrow H$ une fonction convexe, continue et coercive. Alors J atteint un minimum global sur H (DVT 2)