

Rapport du jury

Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme. En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiniennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie. Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d , ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L_p contenus dans L_∞ .

Références

- [M. Benaïm, N. El Karoui - Promenade aléatoire](#)
- [Chabanol et Ruch, Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation](#)
- [Calcul différentiel - El Amrani](#)
- [Calcul différentiel et équations différentielles - S. Benzoni-Gavage](#)
- [Analyse - X. Gourdon](#)
- [P. Caldero - Carnet de voyage en Analystan](#)

Développements

- [Sous-espace engendré par les translatés](#)
- [Chaînes de Markov](#)

Méta-plan

1. Topologie des espaces vectoriels de dimension finie
 1. Théorèmes généraux
 2. Approximation préhilbertienne
2. Equations différentielles
 1. Temps d'existence
 2. Etude des équilibres
 3. Structure des espaces de solutions dans le cas linéaire
3. Objets du calcul différentiel en dimension finie
4. Vecteurs gaussiens

Plan détaillé

On va ici faire un plan thématique en présentant plusieurs domaines d'utilisation de la dimension finie en analyse.

I - Topologie des espaces de dimension finie

1 - Théorèmes généraux [Analyse - X. Gourdon](#)

1. Théorème : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes
2. Contre-exemple : dans $C^0([0, 1])$, les normes 1 et ∞ ne sont pas équivalentes.
3. Théorème (Riesz) : un espace vectoriel normé est de dimension finie ssi sa boule unité est compacte
4. Corollaire : en dimension finie, les compacts sont exactement les fermés-bornés.
5. Exemples :
 1. l'ensemble des mesures de probabilité sur $[1, n]$ s'identifie à un compact de $\mathbb{R}^d$.
 2. La boule unité fermée de L^1 est fermée, bornée, mais pas compacte.
6. Application : Soit (X_n) une chaîne de Markov à valeurs dans un espace d'état fini. (X_n) admet une mesure de probabilité invariante.[Benaïm-El Karoui]
7. Proposition : en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.
8. Contre-exemples : La dérivation sur $(C^1, \|\cdot\|_\infty)$ est linéaire et non continue.

2 - Approximation de dimension finie ([Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - M. El Amrani](#))

1. Proposition : soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F un sev de E de dimension finie d . Alors pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$.
2. Exemples :
 1. pour $f \in C^0([a, b])$, il existe P_n un polynôme de degré au plus n tel que $\|f - P_n\|_\infty = d_\infty(f, \mathbb{R}_n[X])$.
 2. Toute constante $0 \leq a \leq 1$ approche au mieux la fonction de Heaviside sur $[-1, 1]$ au sens de la norme L^1 parmi les fonctions constantes : un minimiseur de la distance peut ne pas être unique.
3. Théorème (projection sur un convexe fermé)
4. Application : régression linéaire
5. Théorème : tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne au plus dénombrable.
6. Proposition : Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit (e_n) une base hilbertienne de H . Alors pour $x \in H$, on a que $d(x, \text{Vect}(e_1, \dots, e_n))$ est atteinte en un unique vecteur donné par $\sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. De plus, $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n$ et cette série converge dans H .
7. Exemple : dans $L^2([0, 2\pi])$, on a une base hilbertienne donnée par $(x \mapsto e^{inx})_n$, et donc toute fonction $f \in L^2$ est somme de sa série de Fourier.
8. Exemple : dans $L^2([-1, 1])$, on considère les polynômes de Legendre, obtenus par orthonormalisation de Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Alors si $f \in L^2$, on a $d_2(f, \mathbb{R}_n[X]) = \int_{-1}^1 |f(t) - P_n(t)|^2 dt$.
9. Application : Quadrature de Gauss-Legendre. [Analystan, cf le poly de développements]

II -Equations différentielles Calcul différentiel et équations différentielles - S. Benzoni-Gavage

1 - Temps d'existence de solutions

1. Théorème (des bouts) : soit f un champ de vecteur en dimension finie, localement lipschitzien par rapport à la variable d'état. Alors, si x est la solution maximale issue de x_0 , l'un des deux est vérifié :
 1. x est globale en temps positif
 2. x est bornée en temps positif
2. Exemple : Les solutions du système de Lotka-Volterra sont globales.

2 - Etude des équilibres

1. Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < -\mu$. Alors il existe une constante $C_\mu > 0$ telle que

$$\forall t > 0, |||\exp(tA)||| \leq C_\mu e^{-t\mu}$$

2. Théorème (linéarisation de Liapounov, cas des parties réelles strictement négatives)
3. Exemple : L'équilibre $(0, 0)$ du pendule simple **amorti** est asymptotiquement stable.
4. Contre-exemples : l'équation du pendule simple se linéarise au voisinage de π ainsi :

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

mais ce point d'équilibre est instable. Le point d'équilibre 0 est stable mais les vp sont encore nulles.

3 - Structure de l'espace des solutions

Dans cette sous-partie, on fixe $A : I \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ des applications continues.

1. Théorème (Structure des solutions) : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, l'équation différentielle $x' = Ax + b$, $x(0) = x_0$ admet une unique solution. L'espace des solutions est par ailleurs un espace affine de dimension d .
2. Définition (matrice fondamentale) : on appelle matrice fondamentale toute application $\Phi : I \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une base de l'espace de solutions de l'équation homogène dont les coordonnées dans la base canonique forment les colonnes de Φ .
3. Exemple : [Benzoni]
4. Théorème (Duhamel) : soit Φ une matrice fondamentale. L'unique solution de l'équation avec condition initiale $x(0) = x_0$ est donnée par :

$$t \mapsto \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

5. Théorème : Soit E un sous-espace de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stable par les opérateurs de translation. Alors E est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants si, et seulement si, E est de dimension finie. (DVT 1)
6. Corollaire : $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est C^∞ et sol d'une équation diff linéaire ssi $Vect(\tau_a f, a \in \mathbb{R})$ est de dimension finie. De plus, la dimension de E est le plus petit ordre d'une telle équation.
7. Exemple :

$$\cos(x + a) = \cos(x) \cos(a) - \sin(x) \sin(a) = \cos(x) \cos(a) - \cos(\frac{\pi}{2} - x) \sin(a) \in Vect(\cos, \sin)$$

III - Objets du calcul différentiel en dimension finie

1. Définition / proposition (gradient) : soit f une fonction différentiable définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs réelles. Pour tout $x \in U$, il existe un unique $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall h, df(x) \cdot h = \langle \nabla f(x), h \rangle$$

Par ailleurs, $\nabla f(x) = (\partial_i f(x))$.

2. Exemple : avec $f : (x, y) \mapsto x \cos(y) - y \sin(x)$, on trouve

$$\nabla f(x, y) = (\cos(y) - y \cos(x), -x \sin(y) - \sin(x)).$$
3. Théorème (extrema liés)
4. Exemple :
5. Définition / proposition (Schwarz / Hessienne) : soit f une application deux fois différentiable en x . L'application $d^2 f(x)$ s'identifie à une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$. On appelle hessienne sa matrice dans la base canonique.
6. Lemme (Morse) (DVT 2)

IV - Vecteurs gaussiens [Chabanol-Ruch]

1. Définition (vecteur gaussien) : On appelle vecteur gaussien standard de dimension d un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont les marginales sont iid de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Si C est une matrice symétrique positive et $\mu \in \mathbb{R}^d$, on dit que $X \hookrightarrow \mathcal{N}_d(\mu, C)$ s'il existe N un vecteur gaussien standard tel que $X = \mu + CN$ (en loi)

2. Contre-exemple : il ne suffit pas que les marginales soient gaussiennes pour faire un vecteur gaussien ! Par exemple si Z est gaussienne et Y est une $\mathcal{B}(1/2)$, alors le vecteur $(Z, (2Y - 1)Z)$ a ses marginales gaussiennes mais n'est pas un vecteur gaussien.
3. Proposition : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}_d(\mu, C)$. Alors :
 1. $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $Cov(X) = C$.
 2. $\phi_X(t) = e^{i\langle t, \mu \rangle} \exp(-\frac{1}{2} t^t C t)$
 3. $AX + b \hookrightarrow \mathcal{N}_d(A\mu + b, AC^t A)$.
4. Théorème : Soit X un vecteur gaussien. Ses marginales sont indépendantes si, et seulement si, elles sont décorrélées (i.e. sa matrice de covariance est diagonale)
5. Contre-exemple : Soit U une uniforme sur $[-1, 1]$. Alors les VA $U1_{-1/2 \leq U \leq 1/2}$ et $U(1 - 1_{-1/2 \leq U \leq 1/2})$ sont décorrélatées mais pas indépendantes.
6. Théorème (central limite multi-dimensionnel)
7. Définition : Loi du χ^2
8. Théorème (Cochran)
9. Application : test d'adéquation du χ^2
10. Exemple : Exercice 3 du chapitre de test : on ne peut pas conclure, au niveau 0.95, que le générateur est biaisé.

Une ancienne partie :

2 - Chaînes de Markov à espace d'états fini. [M. Benaïm, N. El Karoui - Promenade aléatoire](#)

On considère $\mathcal{X}$ un ensemble de dimension d , dit espace d'états.

1. Définition : proba invariante d'une chaîne de Markov
2. Théorème : si (X_n) est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathcal{X}$, elle admet une probabilité invariante (DVT 1)
3. Exemples et contre-exemples : Le modèle de Wright-Fisher admet une infinité de mesures de proba invariantes. Si $\mathcal{X}$ est infini, il peut ne pas exister de mesure invariante, par exemple avec la chaîne définie sur $\mathbb{N}$ $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = X_n + 1$.
4. Définition : chaîne de Markov irréductible

5. Théorème : si (X_n) est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathcal{X}$ **irréductible**, elle a une unique probabilité invariante qui charge tous les points (DVT 2)
6. Corollaire : Si P est une matrice stochastique irréductible, alors tP admet un unique vecteur propre associé à la valeur propre 1. De plus, pour toute mesure de proba sur $\mathcal{X}$ π , la suite géométrique $(\pi \cdot P^n)$ converge au sens de Cesàro vers la proba invariante.
7. Exemple : La loi binomiale est l'unique proba invariante de l'urne de Polya.
8. Remarque : Si (X_n) n'est pas irréductible, alors pour chaque classe de récurrence de (X_n) , il existe une unique proba invariante qui charge uniquement les points de cette classe. Les probas invariantes de (X_n) sont exactement les combinaisons convexes de ces probas.