

Rapport du jury

L'analyse de Fourier, sur le cercle où la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de ce chapitre. Le jury a noté que rares étaient les candidats qui maîtrisaient correctement la théorie L^2 des séries de Fourier. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve n'est pas toujours parfaitement comprise, et que de nombreux candidats sont incapables d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Les candidats solides pourront s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

Références

- [Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels - M. El Amrani](#)
- [M. Benaïm, N. El Karoui - Promenade aléatoire](#)
- [L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann et Pecatte](#)
- [Hirsh-Lacombe - éléments d'analyse fonctionnelle](#)

Développements

- [Echantillonnage de Shannon](#)
- [Optimisation dans un Hilbert](#)

Méta-plan

1. Espaces de Hilbert
 1. Projection sur un convexe fermé
 2. Dualité hilbertienne
2. Bases hilbertiennes

3. Analyse de Fourier dans les espaces de Hilbert
 1. Séries de Fourier de fonctions L^2
 2. Transformée de Fourier sur L^2
4. Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Plan détaillé

On suppose connue les généralités sur les espaces préhilbertiens, notamment celles qui entourent les produits scalaires (comme l'inégalité de Cauchy Schwarz par exemple).

I - Espaces de Hilbert [El Amrani]

1. Définition (espace de Hilbert) : un couple $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert s'il s'agit d'un espace préhilbertien complet pour la topologie induite par la norme associée au produit scalaire.
2. Exemples :
 1. tout e.v.n. de dimension finie peut-être muni d'un produit scalaire qui en fait un espace de Hilbert.
 2. L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites complexes de module de carré sommable est un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel
 3. $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert
 4. $\mathbb{R}[X]$ n'est un espace de Hilbert pour aucun produit scalaire.

1 - Projection sur un convexe fermé

1. Théorème (projection sur un convexe fermé) : Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H . Pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = d(x, C)$.
2. Contre-exemples :
 1. 2 n'a pas de projeté sur le convexe non vide $]0, 1[$.
 2. 0 a une infinité de projetés sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
3. Proposition (caractérisation du projeté) : $p_C(x)$ est entièrement caractérisé par $p_C(x) \in C$ et $\forall y \in C, \Re(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0$. Par ailleurs, si C est un espace vectoriel, cette caractérisation se reformule en $p_C(x) \in C$ et $x - p_C(x) \in C^\perp$.

4. Proposition : p_C est 1-lipschitzienne. Si de plus C est un espace vectoriel, p_C est linéaire continue de norme 1.
5. Application (espérance conditionnelle, [Benaïm-EL Karoui]) : soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathfrak{G}$ une sous tribu de $\mathfrak{F}$. Pour X une variable aléatoire $\mathfrak{F}$ -mesurable et admettant un moment d'ordre 1, il existe une unique variable aléatoire $\mathbb{E}[X \mid \mathfrak{G}]$ qui soit $\mathfrak{G}$ -mesurable et telle que :

$$\forall A \in \mathfrak{G}, \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A \mathbb{E}[X \mid \mathfrak{G}](\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

2 - Dualité hilbertienne

1. Définition (orthogonal d'une partie) : Soit $A \subset H$. On pose $A^\perp := \{x \in H \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de H .
2. Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Alors $(F^\perp)^\perp = F$ et on a :

$$H = \overline{F \oplus F^\perp}$$

3. Application : critère de densité. Une espace $D \subset H$ est dense dans H ssi $D^\perp = 0$.
4. Exemple : la famille $(e_n := (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}})$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ engendre un espace dense dans ℓ^2 .
5. Théorème (représentation de Riesz)
6. Remarque : ce théorème traduit une isométrie $H \cong H'$ qui identifie l'orthogonal hilbertien à l'orthogonal au sens de la dualité topologique.
7. Corollaire / définition (opérateur adjoint) : soit $T : H_1 \rightarrow H_2$ une application linéaire continue entre espaces de Hilbert. Il existe un unique opérateur $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tel que :

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2, \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

8. Exemple : soit $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. On pose

$$T_K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$$

$$f \mapsto (x \mapsto \int_0^1 K(x, y) f(y) dy)$$

T_K est linéaire continu, et son adjoint est donné par :

$$T_K^* : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$$
$$f \mapsto (x \mapsto \int_0^1 \overline{K(y, x)} f(y) dy)$$

9. Proposition (propriétés de l'adjonction) :

1. L'adjonction est linéaire et contravariante pour la composition.

2. $(T^*)^* = T$

3. $\text{Ker}(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp$ et $\overline{\text{Im}(T)} = \text{Ker}(T^*)^\perp$.

10. Application : un opérateur entre espaces de Hilbert est d'image dense si, et seulement si, son adjoint est injectif.

II - Bases hilbertiennes [El Amrani]

1. Définition (famille orthonormale)

2. Lemme : soit (e_n) une famille orthonormale de H et soit $x \in H$. Alors la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge dans H vers le projeté de x sur $\overline{\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})}$.

3. Corollaire (inégalité de Bessel) : avec les mêmes notations, $\|x\|^2 \geq \sum |\langle e_n, x \rangle|^2$.
En particulier, la suite numérique $(\langle e_n, x \rangle)$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

4. Définition (base hilbertienne) : on dit qu'une famille (e_n) est une base hilbertienne de H si c'est une famille orthonormale totale, i.e. elle engendre une partie dense de H .

5. Exemple : la famille $(e_n := (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}})$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ est une base hilbertienne de ℓ^2 . Ce n'est toutefois pas une base algébrique.

6. Théorème : soit (e_n) une famille orthonormale de H . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. (e_n) est une base hilbertienne de H .

2. $\forall x \in H$, la famille $(\langle x, e_n \rangle)$ est ℓ^2 et on a une unique décomposition :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ où cette série converge dans } H.$$

3. Pour tout (x, y) dans H , on a les formules de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

7. Corollaire Si H est un espace de Hilbert admettant une base hilbertienne (e_n) , on a une isométrie surjective $H \cong \ell^2$ qui à x associe ses coefficients dans cette base hilbertienne.
8. Théorème (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)
9. Exemple : polynômes de Legendre
10. Corollaire : un espace de Hilbert est séparable si, et seulement si, il admet une base hilbertienne dénombrable.

III - Analyse de Fourier dans les espaces de Hilbert [El Amrani]

1 - Séries de Fourier dans L^2

Notons $L^2_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions L^2 2π -périodiques.

1. Définition (système trigonométrique)
2. Définition (coefficients de Fourier)
3. Remarque : pour $f \in L^2_{2\pi}$, $S_N(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\text{Vect}(e_k \mid |k| \leq N)$. En particulier, il s'agit de la meilleure approximation de f au sens des moindres carrés par des polynômes trigonométriques de degré N .
4. Théorème (Féjér) : la suite $(S_n(f))$ converge vers f dans L^2 au sens de Cesàro.
5. Corollaire : le système trigonométrique est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ et f est toujours somme de sa série de Fourier dans $L^2_{2\pi}$. On récupère au passage les formules de Parseval.
6. Application (Weierstrass) : soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une suite (P_n) explicite de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ qui converge uniformément vers f .

2 - Transformée de Fourier dans L^2

La théorie sur L^1 est supposée connue.

1. Théorème (transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R})$) la transformée de Fourier est un automorphisme bicontinu de $(S(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ dont l'inverse est donné par :

$$f \mapsto (x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi)$$

2. Corollaire : il existe un unique opérateur $\mathcal{F}$ de L^2 qui coïncide avec la transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R})$. Cet opérateur est inversible et son inverse est donné par

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi} \check{\mathcal{F}}[f]$$

3. Remarque : pour $f \in L^2 \setminus L^1$, la formulation intégrale usuelle n'a aucun sens. Cela dit, on a :

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx$$

4. Exemple : notons $\text{sinc} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ le sinus cardinal. On a $\mathcal{F}[\text{sinc}](\xi) = 1_{[-1/2, 1/2]}(\xi)$.
5. Théorème (Plancherel) : $\forall (f, g) \in L^2, 2\pi \langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle$.
6. Définition (espace BL^2)
7. Lemme : Toute fonction de BL^2 est représentée par une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. Par ailleurs, il existe une constante C telle que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$ pour tout $f \in BL^2$. (DVT 1)
8. Proposition : BL^2 est un sous-espace de Hilbert de L^2 . De plus, une base hilbertienne est donnée par $(\frac{1}{\pi} \tau_{n\pi} \text{sinc})$. (DVT 1)
9. Théorème (échantillonnage de Shannon) : pour toute fonction $f \in BL^2$, on a $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\pi) \tau_{n\pi} \text{sinc}$ où cette série converge absolument et dans L^2 . Par ailleurs, $f \mapsto (f(n\pi))_n$ est une isométrie surjective de BL^2 sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. (DVT 1)

IV - Convergence faible dans les espaces de Hilbert [Hirsch-Lacombe, El Amrani, Isenmann-Pecatte]

1. Définition (suite faiblement convergente)

2. Proposition : toute suite fortement convergente est faiblement convergente et la limite est la même.
3. Exemples :
 1. toute famille orthonormée converge faiblement vers 0 tout en étant de norme constante.
 2. Si $(D_N/\sqrt{N})$ converge faiblement vers 0 dans $L^2_{2\pi}$, où D_N est le N -ième noyau de Dirichlet. Comme elle est de norme constante égale à 1, elle est fortement divergente et n'admet aucune valeur d'adhérence forte.
4. Remarque : en dimension finie, une suite faiblement convergente est fortement convergente.
5. Proposition : Soit $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$.
 1. Si (x_n) converge faiblement vers x^* , elle est bornée et $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n\|$.
 2. (x_n) converge fortement vers x^* si et seulement si elle converge faiblement vers x^* et $\limsup \|x_n\| \leq \|x^*\|$.
6. Théorème (Banach-Alaoglu) : soit (x_n) une suite bornée de H . Elle admet une valeur d'adhérence faible. (DVT 2)
7. Remarque : si H est de dimension finie, on retrouve le fait que les fermés bornés sont compacts.
8. Application : Soit $J : H \rightarrow H$ une fonction convexe, continue et coercive. Elle admet un minimum global sur H . (DVT 2)